Formação e integração empresarial de quadros (FIEQ)

Por despacho conjunto dos secretários de Estado da População e Emprego e das Indústrias Extractivas e Transformadoras foi criado o programa experimental FIEQ, a ser lançado pelo IAPMEI, com o objectivo de desenvolver um esquema de apoio às PMEs nos domínios tecnológico, de organização e gestão.

Para melhor elucidação dos possíveis interessados transcreve-se de seguida o citado despacho, de 17 de Novembro de 1978.

Despacho conjunto

1 — Graves carências das pequenas e médias empresas industriais (PME's) nos domínios tecnológicos de organização e gestão coexistem com numerosas situações de desemprego e subemprego de quadros técnicos, nomeadamente jovens recém-licenciados, que, embora sem experiência profissional, poderão prestar serviços úteis àquelas empresas se lhes for proporcionado um estágio que lhes assegure condições de melhor integração na empresa.

Considera-se, pois, necessário e oportuno lançar uma acção que de algum modo possa contribuir para tal objectivo, pondo-se à disposição das PME's, praticamente sem sobrecarga para os respectivos orçamentos, durante o período do estágio, técnicos com importante formação de base, capazes de desempenharem missões de apoio à gestão daquelas empresas.

O que, por outro lado, permitirá também aprofundar o conhecimento das situações de desemprego e subemprego dos quadros técnicos e das carências das PME's neste domínio.

Deste modo, o Instituto de Apoio às Pequenas e Médias Empresas Industriais (IAPMEI), como organismo especializado no apoio e assistência às PME's industriais, e os serviços competentes da Secretaria de Estado da População e Emprego (SEPE), especializados em matéria de política de emprego e formação profissional, desenvolverão as acções necessárias por forma a dar a melhor execução a um plano experimental visando a formação e integração empresarial de quadros, que se designará por FIEQ.

2 — As empresas candidatas a este apoio deverão ser seleccionadas tendo em atenção as seguintes prioridades e de acordo com a repartição regional adiante referida:

1) PME's objecto de apoio estrutural por parte do IAPMEI;

2) PME's beneficiárias de financiamentos da SEPE ou de avales do IAPMEI com planos de recuperação;

3) Outras PME's credenciadas com necessidade de admissão de quadros.

3 — *a*) Serão apenas consideradas solicitações apresentadas por PME's, conforme indicado no n.º 2, relativamente aos titulares de licenciaturas ou bacharelatos ministrados pelas diversas escolas oficiais do País, com interesse nos domínios tecnológico, de gestão e organização e economia.

b) Poderá também ser incluída no âmbito deste plano experimental a realização de estágios para possuidores de cursos especializados, nomeadamente de *design*, embora neste caso se deva adoptar um esquema de funcionamento adequado à sua especialidade, eventualmente com a colaboração das respectivas escolas no âmbito de acordos a celebrar.

c) A selecção e proposta dos candidatos é da responsabilidade das PME's, não podendo ser admitidos, por empresa, ao abrigo deste esquema de apoio, mais do que dois estagiários de entre as áreas referidas na alínea *a*).

4 — *a*) Este plano experimental compreenderá setenta e dois estágios igualmente distribuídos pelas Regiões Norte (Porto), Centro (Coimbra) e Sul (Lisboa).

b) Para os estágios previstos no n.º 3, é fixado o número máximo de dezoito, no âmbito deste plano experimental;

c) A selecção dos estagiários pelas PME's deverá circunscrever-se a recém-licenciados em situação de desemprego pós-escolar comprovada e ter em conta, entre outros, os seguintes critérios:

1) Maior ambiguidade de formatura;
2) Maior nota de curso;
3) Maiores encargos familiares.

5 — A coordenação do FIEQ caberá a uma comissão coordenadora, funcionando junto do IAPMEI, a qual será integrada por dois representantes, a tempo completo, dos serviços da SEPE, e outros dois do IAPMEI, cabendo a presidência a um dos representantes do Instituto.

6 — O estágio decorrerá na empresa, terá a duração de seis meses e incluirá, além do trabalho a realizar na mesma, dois cursos de formação com a duração máxima de três semanas, sendo o primeiro subordinado ao tema genérico «Empresa: técnicas gerais de gestão».

7 — *a*) O acompanhamento dos estagiários será feito, na medida do possível, durante a sua permanência nas empresas, pelas equipas de assistência do IAPMEI em colaboração com os quadros e dirigentes daquelas.

b) Os estagiários deverão apresentar um trabalho à sua escolha, sob orientação da comissão coordenadora, relativo a um problema epecífico da empresa.

8 — *a*) Cada PME beneficiária do FIEQ deverá celebrar com os estagiários um contrato individual de trabalho, obrigando-se à sua inscrição na Previdência Social e ao seu seguro por acidentes de trabalho, encargos estes que serão de sua conta.

b) A cada PME será atribuído, durante o período de estágio, e por estagiário, um subsídio fixo de 10 000$00 mensais, não podendo, em caso algum, a remuneração do estagiário ser inferior a este montante.

Os encargos respectivos serão suportados pelo IAPMEI (40 %) e pelo Fundo de Desenvolvimento da Mão-de-Obra (FDMO) (60 %), ficando a cargo do Instituto o apoio administrativo necessário.

9 — O IAPMEI assegurará o pagamento da totalidade dos encargos para com terceiros, após o visto da comissão coordenadora, transferindo o FDMO para o Instituto a parte da verba orçamentada que lhe corresponda suportar. No final da execução do plano experimental será efectuado encontro de contas mediante apresentação pelo IAPMEI da respectiva documentação.

10 — Todos os acordos e contratos com terceiros serão celebrados por intermédio do IAPMEI.

11 — Será elaborado um relatório final pela comissão coordenadora, do qual deverá constar uma análise geral da situação do desemprego e subemprego dos quadros técnicos, a avaliação dos resultados deste plano, um mapa com as despesas efectuadas e propostas de acção subsequentes de âmbito mais geral, enquadrando iniciativas desta natureza na política de manutenção e criação de postos de trabalho e formação profissional.

12 — Os membros da comissão coordenadora, a nomear no prazo de quinze dias pelo IAPMEI e pelos serviços competentes da SEPE, deverão começar por elaborar uma programação detalhada da forma de execução e de acompanhamento deste plano.

(Continua na pág. 201)

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.25/27/28:622

Prática de Krigagem

FERNANDO HUMBERTO MUGE (*)

RESUMO

Introduz-se a noção de estimador linear optimizante — estimador de Krigagem. Constroi-se o sistema de Krigagem para o caso estacionário. Dão-se exemplos de variáveis regionalizadas em que não é válida a hipótese de estacionaridade e definem-se para estes casos os estimadores de Krigagem Universal.

Dão-se exemplos de Krigagem de variáveis intercorrelacionadas (Cokrigagem) e constroi-se o respectivo sistema de Cokrigagem.

Indica-se a estrutura básica de um programa de Krigagem.

ABSTRACT

It is introduced the notion of best linear unbiased estimator — Kriging estimator. It is presented the Kriging system of equations for the stationary case.

They are given examples of regionalized variables for the non stationary case and are defined, for these cases, the best linear unbiased estimador — Universal Kriging estimator.

They are also given examples in which are kriged intercorrelationated variables (cokriging) and is presented the respective cokriging system.

It is shown the basic structure of a Kriging program.

ÍNDICE

1. POSIÇÃO DO PROBLEMA
2. EQUAÇÕES DE KRIGAGEM
   2.1. Composição de Krigagens
3. KRIGAGEM EM PRESENÇA DE DERIVA — KRIGAGEM UNIVERSAL
   3.1. Introdução
   3.2. Sistema de Cokrigagem Universal
4. COKRIGAGEM
   4.1. Introdução
   4.2. Sistema de Cokrigagem
5. ESTRUTURA BÁSICA DE UM PROGRAMA DE KRIGAGEM
   5.1. Observações
   5.1.1. Pesquisa das amostras
   5.1.2. Cálculo das covariâncias
6. BIBLIOGRAFIA

1 — POSIÇÃO DO PROBLEMA

O problema da Krigagem consiste em encontrar o melhor estimador linear possível de uma característica desconhecida a partir da informação disponível.

A informação disponível consiste geralmente numa *informação experimental,* por exemplo nos teores

(*) Assistente do Instituto Superior Técnico; Investigador do I. N. I. C. no C. V. R. M. U. T. L.

de troços de sondagem implantados no interior e no exterior do painel a estimar e numa *informação estrutural,* por exemplo o variograma da Função Aleatória representativa da regionalização dos teores estudados.

Sendo Z (x) a Função Aleatória estudada, pontual ou considerada como tal à escala da estimação projectada, estacionária de 2.ª ordem, de esperança:

$$E[Z(x)] = m \text{ (constante)}$$

Vamos supor conhecido o seu momento de 2.ª ordem:

$$E\{[Z(x)-m]\ [Z(x+h)-m]\} = C(h) \text{ — covariância centrada}$$

ou $E\{[Z(x+h)-Z(x)]^2\} = 2.\gamma(h)$ — variograma

— A informação experimental é constituída por um conjunto discreto de N teores Z_i (com $i=1, N$). Estes teores Z_i são, ou teores pontuais $Z(x_i)$ ou teores médios $Z_i = \frac{1}{v_i}\int_{v_i} Z(x)\,dx$ definidos em suportes de dimensão v_i (volume, superfície ou comprimento). Introduzindo a hipótese de estacionaridade todos estes suportes têm por esperança m: $E[Z_i] = m \quad \forall_i$.

— O propósito da Krigagem é o de obter o melhor estimador linear do valor médio de Z(x) num domínio V (bloco, painel, totalidade do depósito ou simplesmente num ponto de espaço): $Z_V = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx$

O estimador de Krigagem: Z_k tomará então a forma: $Z_k^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Z_i$

em que os λ_i são os ponderadores a afectar à informação experimental.

2 — EQUAÇÕES DE KRIGAGEM

O estimador de Krigagem deverá ter as seguintes propriedades:

— Z_k^* deve ser um estimador não enviezado isto é: $E\left[Z_V - Z_k^*\right] = o \Longrightarrow \sum_i \lambda_i = 1$

— A variância de estimação (variância de Krigagem) deverá ser mínima, o que conduz ao seguinte sistema linear de equacões (sistema de Krigagem):

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j\, \overline{C}(v_i, v_j) - \mu = \overline{C}(v_i, V) & \forall\ i = 1, N \\ \sum_j \lambda_j = 1 \end{cases}$$

A variância de Krigagem escreve-se:

$$\sigma_k^2 = E\left[Z_V - Z_k^*\right]^2 = \overline{C}(V,V) + \mu - \sum_i \lambda_i\, \overline{C}(v_i, V)$$

Podem-se estabelecer as equações de Krigagem partindo do variograma $\gamma(h)$ em vez da covariância C(h). Obtém-se então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j\, \overline{\gamma}(v_i, v_j) + \mu = \overline{\gamma}(v_i, V) \quad , & \forall\ i = 1, N \\ \sum_j \lambda_j = 1 \end{cases}$$

$$\sigma_k^2 = \sum_i \lambda_i\, \overline{\gamma}(v_i, V) + \mu - \overline{\gamma}(V,V) \qquad (1)$$

Em notação matricial o sistema de Krigagem escreve-se:

$$[G] \times [\lambda] = [M] \implies \begin{cases} [\lambda] = [G]^{-1} . [M] \\ \sigma_k^2 = [\lambda]^t . [M] - \bar{\gamma}(V, V) \end{cases}$$

em que a matriz do 1.º membro ou matriz de Krigagem [G] se escreve:

$$[G] = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(v_1, v_1) & \cdots & \bar{\gamma}(v_1, v_i) & \cdots & \bar{\gamma}(v_1, v_N) & 1 \\ \vdots & & & & & \\ \bar{\gamma}(v_i, v_1) & \cdots & \bar{\gamma}(v_i, v_i) & \cdots & \bar{\gamma}(v_i, v_N) & 1 \\ \vdots & & & & & \\ \bar{\gamma}(v_N, v_1) & \cdots & \bar{\gamma}(v_N, v_i) & \cdots & \bar{\gamma}(v_N, v_N) & 1 \\ 1 & & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note-se que a matriz de Krigagem é simétrica:

$$\bar{\gamma}(v_i, v_j) = \bar{\gamma}(v_j, v_i) \quad \forall\ i, j$$

A matriz dos ponderadores de Krigagem [λ] e a matriz 2.º membro [M] são duas matrizes-coluna:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} \qquad [M] = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(v_1, V) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(v_i, V) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(v_N, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

A variância de Krigagem σ_k^2 não é senão o produto da matriz transposta $[\lambda]^t$ pela matriz 2.º membro [M] menos o termo $\bar{\gamma}(V, V)$.

OBSERVAÇÕES AO SISTEMA DE KRIGAGEM

1 — O sistema de Krigagem é um sistema de (N+1) equações lineares a (N+1) incógnitas que são os N ponderadores λ_i das N informações experimentais Z_i e o parâmetro de Lagrange μ. Demonstra-se que o sistema de Krigagem é sempre *regular*, isto é, fornece sempre uma solução única.

2 — A Krigagem, estimador linear e não enviezado, é também um interpolador exacto isto é, se o suporte V a estimar se confundir com o suporte v_i de uma qualquer das informações experimentais disponíveis, o sistema de Krigagem fornece:

— Um estimador Z_k idêntico ao teor conhecido Z_i desse suporte $v_i \equiv V$.

— Uma variância de Krigagem nula: $\sigma_k^2 = E\{[Z_k^* - Z_i]^2\} = 0$

Isto significa que a «superfície Krigada» passa pelos pontos experimentais.

Esta propriedade não é verificada por todos os processos de estimação, em particular pelos processos de ajustamento polinomial utilizando o método dos mínimos quadrados.

3 — A escrita dos sistemas e variâncias de Krigagem com as notações simbólicas $\overline{\gamma}$ ou $\overline{C}$ é perfeitamente geral quaisquer que sejam os suportes v_i, v_j da informação e o suporte V da grandeza a estimar.

Assim, certas informações v_i podem estar inclusas em V: $v_i \subset V$. As informações podem ainda sobrepor-se parcialmente $v_i \cap v_j \neq \phi$. Pode-se ainda considerar como $(N+1)^a$ informação a média aritmética das N informações já consideradas.

O tipo de estrutura subjacente caracterizada pelo variograma $\gamma(h)$, embricado ou não, isótropo ou anisótropo, também não interfere na forma genérica do sistema de Krigagem.

4 — O sistema de Krigagem e a variância de Krigagem dão, além disso, conta dos seguintes factos essenciais que condicionam toda a estimação:

— Geometria do domínio a estimar: termo $\overline{\gamma}$ (V, V) de σ^2_k.
— Distância entre o estimado e o estimante: termos $\overline{\gamma}(v_i, V)$ do 2.º membro [M].
— Geometria interna da informação: termos $\overline{\gamma}(v_i, v_j)$ da matriz do 1.º membro [G].
— Estrutura subjacente caracterizada pela função estrutural semi-variograma $\gamma(h)$.

Note-se ainda um facto extremamente importante, a variância de Krigagem:

$\sigma^2_k = [\lambda]^t . [M] - \overline{\gamma}(V, V)$ não depende senão da estrutura $\gamma(h)$ e das geometrias e não dos valores efectivos da informação.

Pode-se portanto, conhecendo $\gamma(h)$, *prever* a qualidade da Krigagem deste ou daquele painel V com esta ou aquela configuração da informação.

Este facto permite optimizar o reconhecimento das jazidas (V. g. secção Geostatística como instrumento de Planeamento Mineiro).

5 — A matriz do 1.º membro [G] não depende senão das geometrias relativas internas (v_i, v_j) das informações disponíveis e não depende da geometria do painel V a estimar. Isto deve-se ao facto de o sistema de Krigagem ser um sistema linear de equações o que conduz a que a duas configurações de informação idênticas corresponda a mesma matriz [G].

As duas matrizes-coluna solução $[\lambda]$ e $[\lambda']$ obtém-se então pelo produto da *mesma* matriz inversa $[G]^{-1}$ pelas 2 matrizes coluna do 2.º membro:

$$[\lambda] = [G]^{-1} . [M] \qquad e \qquad [\lambda'] = [G]^{-1} . [M']$$

2.1. — Composição de Krigagens

Na prática o estimador global de uma zona ou mesmo de todo o jazigo é obtido por composição dos estimadores de unidades locais (painéis ou blocos).

Como vimos atrás (observação 5 ao sistema de Krigagem) o suporte V a estimar só intervém no 2.º membro do sistema. Assim a solução do sistema de Krigagem: $[\lambda] = [G]^{-1} . [M]$ é linear em V.

Seja $\lambda_i(x)$ a solução da Krigagem do teor pontual Z(x) implantado em x, a partir de uma dada configuração de informação (C). A partir da mesma configuração (C), procura-se agora Krigar o teor médio:

$$Z_V = \frac{1}{V} \int_V Z(x)\, dx$$

definido no suporte V. A solução $\lambda_i(V)$ desta Krigagem será então:

$$\lambda_i(V) = \frac{1}{V} \int_V \lambda_i(x)\, dx \qquad , \forall\ i \in C$$

Há portanto combinação linear das Krigagens pontuais para constituir a Krigagem global de V.

Donde se conclui que é indiferente Krigar directamente a média global para todo o jazigo ou proceder por composição de Krigagens locais.

Esta propriedade é extremamente útil pois permite calcular imediatamente, por simples ponderação, o melhor estimador do teor global de um jazigo a partir dos teores Krigados para cada painel em que ele foi dividido.

A estimação painel a painel é deste modo perfeitamente equivalente à estimação global.

Observações:

— A variância de Krigagem: $\sigma^2_{kV} = E\left\{\left[Z_V - \dot{Z}_V\right]^2\right\}$ não se obtém por simples combinação linear das variâncias de Krigagem pontuais.

— O teorema de composição de Krigagens supõe que todos os estimadores são construídos a partir da mesma configuração de dados.

3 — KRIGAGEM EM PRESENÇA DE DERIVA — KRIGAGEM UNIVERSAL

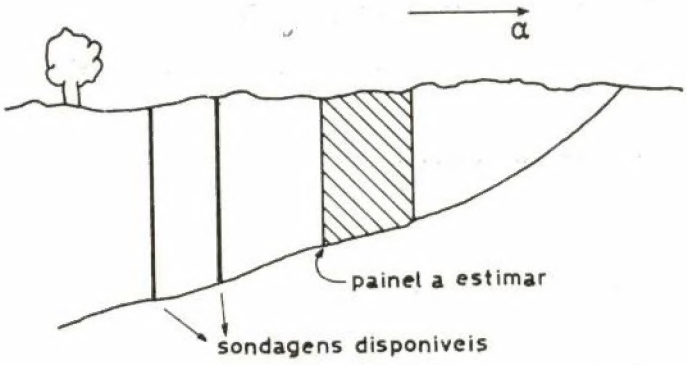
3.1. — Introdução

Considerámos até agora variáveis regionalizadas $Z(x)$ tais que $E[Z(x)] = m =$ constante.

Existem no entanto muitos fenómenos para os quais a hipótese de estacionaridade não é válida.

Assim, por exemplo, a plataforma continental afunda-se progressivamente e em média um ponto mais afastado da costa apresentará uma profundidade maior. Esta deriva $m(x)$ é além disso, o factor preponderante de variabilidade entre as V.R. [1].

Em certas zonas de um jazigo pode-se detectar a existência de uma deriva (empobrecimento progressivo nas zonas limítrofes do jazigo, por exemplo). É portanto necessário de tomar em linha de conta a deriva quando se pretende efectuar a estimação por Krigagem dessas zonas do jazigo.



Assim, por exemplo, consideremos uma lentícula mineralizada cujos bordos terminam em bisel. Pode acontecer que se tenha que estimar a possança média de um painel de borda a partir de sondagens situadas fora do painel.

Uma Krigagem estacionária como qualquer outro processo de estimação estacionário sobreavaliará inevitavelmente a possança média real do painel. É portanto necessário ter presente a deriva das possanças na direcção α de empobrecimento da lentícula.

Em gravimetria é usual distinguir duas componentes do campo gravítico: uma componente regional e uma componente local.

Esta separação é utilizada nos problemas de interpolação e extrapolação da gravidade distinguindo-se uma componente determinista denominada deriva regional («regional trend») e uma componente não determinista que tome em linha de conta os desvios locais tomados em relação à deriva.

Os métodos correntemente utilizados para resolver este problema são métodos de ajustamento polinomial que consistem em minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre os dados experimentais e a deriva (mínimos quadrados). O modelo subjacente a tais métodos pressupõe que o fenómeno é a soma de uma componente determinística e um termo de erro $\epsilon(x)$ com média nula, variância constante e sem auto-correlação (ruído puro):

$$Z(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l f^l(x) + \epsilon(x)$$

Este modelo que pode ser adequado quando as variáveis aleatórias são independentes, revela-se contudo inapto para representar fenómenos espaciais em que a autocorrelação desempenha um importante papel. O modelo adaptado na Krigagem Universal (K. U.) é o seguinte: o fenómeno em estudo é visto como a reali-

zação de uma função aleatória $Z(x)$ que é a soma de dois termos: $Z(x) = m(x) + Y(x)$ em que $m(x)$ é a componente determinista chamada deriva que é igual ao valor expectável de $Z(x)$ no ponto x:

$$m(x) = E[Z(x)]$$

Admite-se que a deriva admite uma representação sob a forma:

$$m(x) = \sum_{l} a_l f^l(x)$$

$Y(x)$ é a componente aleatória denominada resíduo. Este termo não deve ser confundido com o termo $\epsilon(x)$ dos mínimos quadrados e isto porque $Y(x)$ é uma função aleatória com estrutura própria.

3.2. — Sistema de Krigagem Universal

Suponhamos que queremos estimar o teor médio: $Z_V = \frac{1}{V} \int_V Z(x)\, dx$ a partir da informação disponível constituída, por exemplo, pelos N teores médios $Z_i = \frac{1}{v_i} \int_{v_i} Z(x)\, dx$ em presença de:

— uma deriva $m(x) = \sum_{l=o}^{k} a_l f^l(x)$ de forma suposta conhecida

— um variograma $\gamma(h)$

Tomemos um estimador linear da forma: $\overset{*}{Z}_{KU} = \sum_i \lambda_i Z_i$

Os ponderadores são escolhidos de modo a que as condições de não enviezamento e de variância mínima: sejam respeitadas:

(1) $E[Z_V - \overset{*}{Z}_{KU}] = 0$ *não enviezamento*

O que conduz a:

$$\left[\sum_i \lambda_i \frac{1}{v_i} \int_{v_i} f^l(x)\, dx = \frac{1}{V} \int_V f^l(x)\, dx \right] \sum_l a_l = 0$$

O que é uma identidade em a_l. Donde; designando por:

$$b_v^l = \frac{1}{v} \int_v f^l(x)\, dx$$

vem:

$$\boxed{\sum_i \lambda_i b_{v_i}^l = b_V^l \qquad \forall\, l = 0, k}$$

(2) *Variância de estimação mínima*

A minimização de $\sigma^2_{KU} = E[Z_V - Z^*_{KU}]^2$ sujeita aos constrangimentos de não enviezamento obtém-se classicamente através do formalismo de Lagrange, e conduz ao sistema de Krigagem seguinte:

$$\begin{cases} \sum_j \lambda_j \overline{\gamma}(v_i, v_j) + \sum_l \mu_l b_{v_i}^l = \overline{\gamma}(v_i, V) & \forall_i = 1, N \\ \sum_j \lambda_j b_{v_j} \qquad\qquad = b_V^l & \forall_l = 0, k \end{cases}$$

$$\sigma_K^2 = \sum_i \lambda_i \overline{\gamma}(v_i, V) + \sum_{l=0}^{k} \mu_l b_V^l - \overline{\gamma}(V, V)$$

Observações:

— O sistema de Krigagem Universal é um sistema de N+K+1 equações lineares a N+K+1 incógnitas que são os N ponderadores de Krigagem λ_i e os (K+1) parâmetros de Lagrange.

Demonstra-se que este sistema é sempre regular, isto é que admite uma solução única, se e somente se as (K+1) funções $f^l(x)$ forem linearmente independentes sobre o conjunto das N informações, quer dizer se o sistema:

$$\sum_l c_l \, b^l_{v_i} = 0 \qquad \forall_i = 1,N \qquad \Rightarrow \qquad c_l = 0, \ \forall_l$$

— O sistema de K. U. conduz ao sistema de Krigagem estacionária fazendo K = 0: m(x) = a0 = constante. Com efeito $f_o(x) = 1$ e $b^o_v = 1$, $\forall_v$. Dos (K+1) constrangimentos de não enviezamento:

$$\sum_j \lambda_j \, b^l_{v_j} = b^l_V, \ \forall_l \text{ só resta um: } \sum_j \lambda_j = 1.$$

— O sistema de K. U. aparece como um sistema de Krigagem estacionária ao qual se juntaram K equações suplementares correspondentes aos K termos $a_l \, f^l(x)$, $l \neq 0$, da deriva m(x).

A matriz 1.º membro [GU] do sistema universal obtém-se completando a matriz 1.º membro [G] do sistema estacionário com K linhas e K colunas:

$$[GU] = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{\gamma}(v_1, v_1) & \cdots & \bar{\gamma}(v_1, v_N) & 1 & b^1_{v_1} & \cdots & b^k_{v_1} \\
 & [K] & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\bar{\gamma}(v_N, v_1) & \cdots & \bar{\gamma}(v_N, v_N) & 1 & b^1_{v_N} & \cdots & b^k_{v_N} \\
1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b^1_{v} & \cdots & b^1_{v_N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b^1_{v_1} & \cdots & b^1_{v_N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b^k_{v_1} & \cdots & b^k_{v_N} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]$$

Note-se que a matriz [GU] permanece simétrica.

Para as matrizes coluna desconhecidas [λU] e 2.º membro [MU] vem também:

$$[\lambda U] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix} \qquad [MU] = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(v_1, V) \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(v_N, V) \\ 1 \\ b^1_V \\ \vdots \\ b^k_V \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \ N+1 \text{ linhas} \\ \\ \updownarrow \ k \text{ linhas} \end{array}$$

O sistema de Krigagem Universal sendo: [GU]. [λ U] = [MU], a variância de Krigagem escreve-se:

$$\sigma^2_{KU} = [\lambda\, U]^t \,.\, [MU] - \bar{\gamma}(V, V)$$

— Da Krigagem estacionária a esperança desconhecida à Krigagem em presença de deriva vão aparecendo condições de não-enviezamento cada vez mais numerosas. A esperança desconhecida mas suposta constante m, (Krigagem estacionária) aparece a condição única: $\sum_i \lambda_i = 1$. Quando a esperança é desconhecida e não estacionária m(x), aparecem (K+1) condições sobre os ponderadores.

Quanto mais numerosas são as condições, quer dizer quanto mais complexa é a estrutura da esperança desconhecida, mais difícil será a estimação, quer dizer mais forte será a variância de Krigagem. O que se ganha protegendo os riscos de enviezamento devidos a uma eventual deriva perde-se em variância de Krigagem.

4. — COKRIGAGEM

4.1. — Introdução

O objectivo da cokrigagem é o de melhorar estimações locais tomando em consideração a informação adicional trazida por uma variável diferente da que se pretende estimar.

Acontece por vezes que se estima uma grandeza, o teor em Pb dum painel, por exemplo, não só a partir da sua regionalização em Pb, insuficientemente reconhecida, mas também à custa doutra regionalização, a dos teores em Zn por exemplo.

Um outro exemplo é a estimação do teor em U_3O_8 à custa da informação existente sobre teores e da radiometria dos furos de sondagem o que constitui outra variável regionalizada cuja estrutura apresenta forte correlação espacial com a dos teores em U_3O_8.

É evidente que a utilização da cokrigagem só é útil quando:

— a informação disponível na variável em estudo é insuficiente para obter boas estimativas;

— a correlação espacial entre as variáveis é suficientemente forte para que a variável adicional traga algum ganho de informação que sirva para a estimação da primeira.

Sejam então K funções aleatórias intercorrelacionadas:

$$Z_1(x),\ Z_2(x),\ \ldots,\ Z_K(x)$$

sendo os seus momentos dados por:

momento de 1.ª ordem: $E\{Z_k(x)\} = m_k$

momento de 2.ª ordem: $E\{Z_{k'}(x+h)\ Z_k(x)\} - m_{k'}\, m_k = C_{kk'}(h)$

ou:

$$E\{[Z_{k'}(x+h) - Z_{k'}(x)]\ [Z_k(x+h) - Z_k(x)]\} = 2\ \gamma_{kk'}(h)$$

$\gamma_{kk'}(h)$ designa-se por variograma cruzado das variáveis k com k.'

4.2. — Sistema de Cokrigagem

Consideremos então a estimação do teor pontual $Z_{k_0}(x_{k_0})$ a partir da informação constituida por:

N_k teores pontuais $Z_k(x_{ik})$, ik = 1, N_k $\quad \forall_k$

Seja $Z^*_{k_0}(x_{k_0})$ o estimador de cokrigagem:

$$Z^*_{k_0}(x_{k_0}) = \sum_{i1} \lambda_{i1} Z_1(x_{i1}) + \sum_{i2} \lambda_{i2} Z_2(x_{i2}) + \ldots + \sum_{iK} \lambda_{iK} Z_K(x_{iK})$$

A condição de não enviezamento conduz a:

$$E\{Z_{k_o}(x_{k_o}) - \overset{*}{Z}_{k_o}(x_{k_o})\} = 0 \implies \sum_{ik_o} \lambda_{ik_o} = 1 \text{ e } \sum_{ik} \lambda_{ik} = 0 \qquad \forall\ k \neq k_o$$

A minimização da variância:

$$\sigma^2_{k_o} = E\{[Z_{k_o}(x_{k_o}) - \overset{*}{Z}_{k_o}(x_{k_o})]^2\}$$

com os K constrangimentos precedentes conduz ao sistema de $\left(\sum_k N_k + K\right)$ equações lineares designado por sistema de cokrigagem:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} \sum_{ik=1}^{N_k} \lambda_{ik}\ \gamma_{kk'}(x_{ik}, x_{jk'}) = \gamma_{k_o k'}(x_{k_o}, x_{jk'}), & \forall\ k' \text{ e } \forall\ jk' \\ \sum_{ik_o=1}^{N_{k_o}} \lambda_{ik_o} = 1 \\ \sum_{ik=1}^{N_k} \lambda_{ik} = 0, & \forall\ k \neq k_o \end{cases}$$

A variância de krigagem é dada por:

$$\sigma^2_{ko} = \sum_k \sum_{ik} \lambda_{ik}\ \gamma_{k_o k}(x_{k_o}, x_{ik}) + \mu_{k_o} - \gamma_{k_o k_o}(x_{k_o}, x_{k_o})$$

Supondo duas variáveis *i* e *j* vem em notação matricial:

$$[CK] \times [\lambda] = [M] \implies [\lambda] = [CK]^{-1} \times [M]$$

A matriz do 1.º membro ou matriz de cokrigagem escreve-se:

$$[CK] = \begin{bmatrix} \overline{\gamma_i}(x_{1i}, x_{1i}) & \cdots & \overline{\gamma_i}(x_{1i}, x_{N_i i}) & \overline{\gamma_{ij}}(x_{1i}, y_{1j}) & \cdots & \overline{\gamma_{ij}}(x_{1i}, y_{N_j j}) & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\gamma_{ij}}(x_{N_i i}, x_{1i}) & \cdots & \overline{\gamma_i}(x_{N_i i}, x_{N_i i}) & \overline{\gamma_{ij}}(x_{N_i i}, y_{1j}) & \cdots & \overline{\gamma_{ij}}(x_{N_i i}, y_{N_j j}) & 1 & 0 \\ \overline{\gamma_{ij}}(y_{1j}, x_{1i}) & \cdots & \overline{\gamma_{ij}}(y_{1j}, x_{N_i i}) & \overline{\gamma_j}(y_{1j}, y_{1j}) & \cdots & \overline{\gamma_j}(y_{1j}, y_{N_j j}) & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\gamma_{ij}}(y_{N_j j}, x_{1i}) & \cdots & \overline{\gamma_{ij}}(y_{N_j j}, x_{N_i i}) & \overline{\gamma_j}(y_{N_j j}, y_{1j}) & \cdots & \overline{\gamma_j}(y_{N_j j}, y_{N_j j}) & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e as matrizes coluna solução $[\lambda]$ e matriz 2.º membro $[M]$ são:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_{N_i i} \\ \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{N_j j} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} \overline{\gamma}_i (x_{1i}, V) \\ \vdots \\ \overline{\gamma}_i (x_{N_i i}, V) \\ \overline{\gamma}_{ij} (y_{1j}, V) \\ \vdots \\ \overline{\gamma}_{ij} (y_{N_j j}, V) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A variância de krigagem vem na mesma notação:

$$\sigma^2_{CK} = -\overline{\gamma}(V, V) + [\lambda]^t \times [M]$$

fórmula esta idêntica à de krigagem estacionária.

5. — ESTRUTURA BÁSICA DE UM PROGRAMA DE KRIGAGEM

Os dados de partida de um programa de krigagem são os seguintes:

— um ficheiro de amostras com os respectivos teores e coordenadas.

— um ficheiro de blocos a serem estimados (características geométricas e implantação espacial).

— um modelo para a função variograma.

Para cada bloco a krigar será repetido o processo seguinte (ver fig. 1):

— Considera-se um bloco.

— O ficheiro das amostras é percorrido, procurando-se as amostras que caem na zona de influência (auréola) do bloco.

— Uma vez encontradas, são calculadas as covariâncias destas amostras, o que define a matriz 1.º membro do sistema de krigagem [G].

— São calculadas as covariâncias destas amostras com o bloco a krigar o que define a matriz coluna 2.º membro do sistema de krigagem M (ver fig. 1).

— O sistema de krigagem: $[G] . [\lambda] = [M]$ é resolvido para a determinação da matriz-coluna dos ponderadores ou coeficientes de Krigagem $[\lambda]$.

— O estimador de krigagem do teor do bloco é obtido multiplicando os ponderadores pelos teores das amostras retidas.

— A precisão da estimação é calculada pela fórmula (1).

5.1. — Observações

5.1.1. — Pesquisa das Amostras

Na maior parte dos programas que utilizam os métodos clássicos (método dos polígonos, das distâncias ponderadas, etc...) a pesquisa das amostras que intervém na estimação dum bloco é realizada a duas dimensões por polígonos ou por cones no espaço a 3 dimensões. Isto é feito para assegurar uma representação uniforme para todas as direcções do espaço de modo a evitar o efeito de «écran» que se verifica quando ocorrem concentrações de amostras preferencialmente em certas direcções.

Este cuidado é desnecessário em krigagem e isto porque a introdução das covariâncias entre as amostras provoca uma distribuição automática da influência pelos constituintes do grupo evitando a sua sobrerepresentação no sistema de krigagem.

PROGRAMA DE KRIGAGEM

(DIAGRAMA DE BLOCOS)

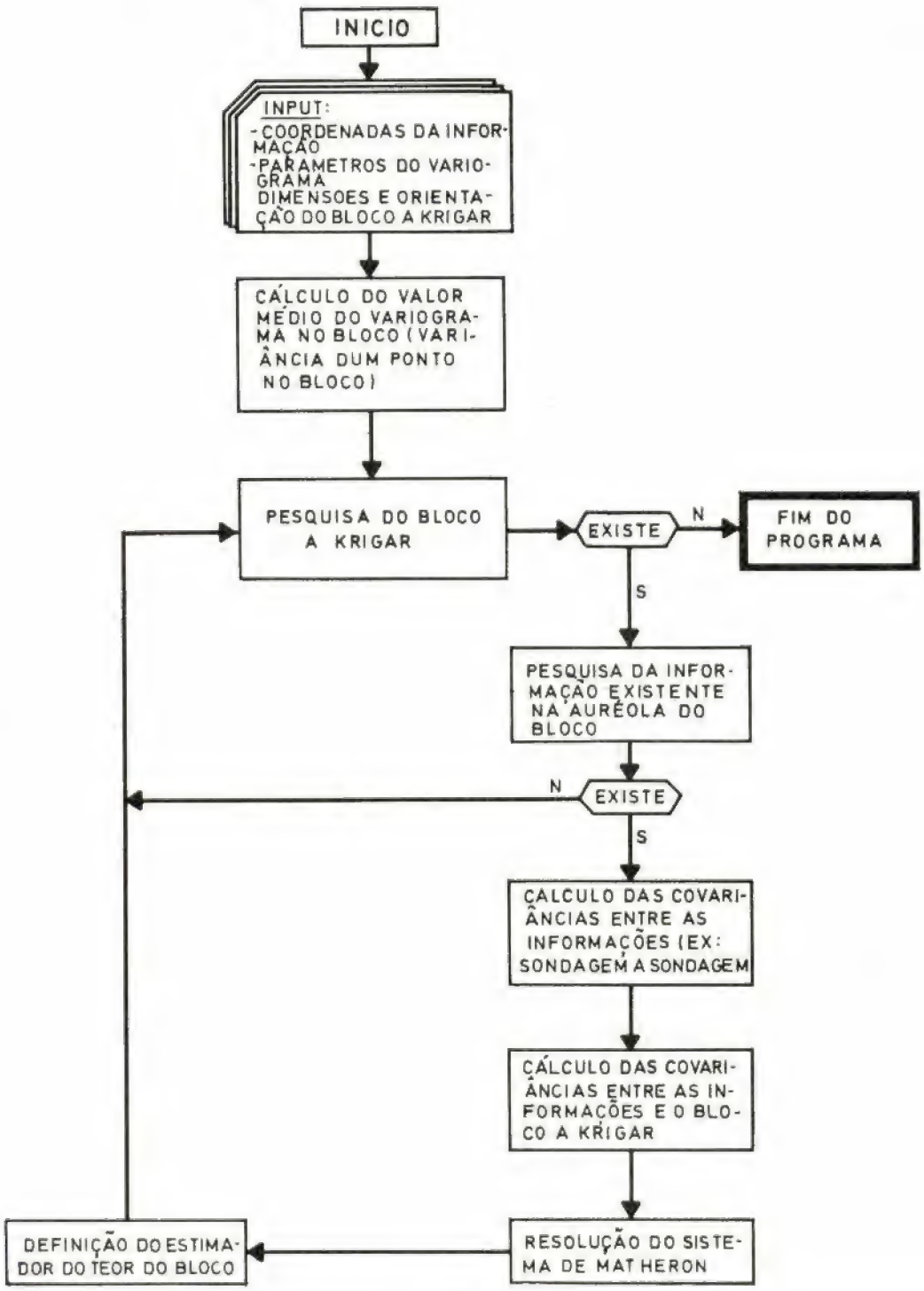


Fig. 1

5.1.2. — Cálculo das Covariâncias

A covariância do bloco Z_o com a amostra X_i: $\sigma_{Z_o X_i}$ é por definição:

$$\sigma_{Z_o X_i} = C + C_o - \frac{1}{V} \iiint_V \gamma \left(\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \right) dx \, . \, dy \, . \, dz$$

em que V é o volume do bloco Z_o e x_i, y_i e z_i são as coordenadas da amostra X_i.

O cálculo desta covariância é feito pelo processo numérico ilustrado na fig. 2.

Os valores médios $\overline{\gamma}(v_i, v_j)$ são calculados numericamente, discretizando cada um dos suportes v_i, v_j, o que conduz a assimilar cada suporte v_i à reunião de N_i pontos x_{i_k}, $k = 1, N_i$, dispostos segundo malha regular em v_i.

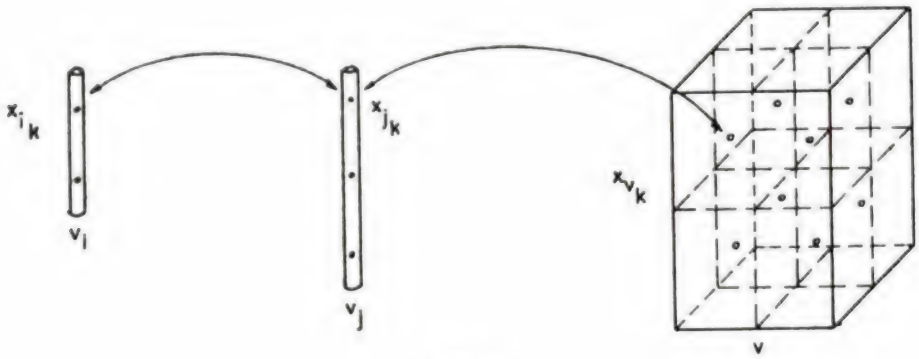


Fig. 2

BIBLIOGRAFIA

[1] **Chilès, J. P.**, 1973 — Étude de la bathymetrie de la mer d'Iroise, Ed. ENSMP, Paris.

[2] **David, M.**, 1975 — Geostatiscal ore reserve estimation. Rapport EP - 75 - R - 52, École Polytechnique de Montréal.

[3] **David, M.**, 1975 — The Practice of Kriging. Proceedings of NATO ASI, Rome.

[4] **Delfiner, P. Delhomme, J. P.**, 1973 — Application du Krigeage à l'Optimisation d'une Campagne Pluviométrique en Zone Aride. Proceedings of the Symposium DEWARPID, Madrid, pp, 191 a 204.

[5] **Guarascio, M.**, 1975 — Improving the Uranium Deposits Estimations (The Novazza Case). Proceedings of NATO ASI. Rome.

[6] **Journel, A.**, 1975 — Guide Pratique de Geostatistique Miniére, Ed. ENSMP, Paris.

[7] **Matheron, G.**, 1970 — La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications, Fascicule 5, CMM, Fontainebleau.

[8] **Matheron, G., Huijbregts, C.**, 1970 — Universal Kriging — An Optimal Approach to Trend Surface Analysis. «Decision Making in the Mineral Industry», pp. 159-169 Canadian Institute of Mining and Metallurgy, Special Volume n.º 12 — Montreal.

[9] **Monget, J. M.**, 1970 — A New Statistical Treatment of Gravity Data, Ed. ENSMP, Paris.

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.24/25/27/28:622:550

Uma nova parametrização de jazidas minerais

JOSÉ QUINTINO ROGADO
Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico

RESUMO

Apontam-se algumas limitações à prática habitual do critério de rejeição baseado sobre pequenos blocos e respectivo teor tal-qual.

É-se assim conduzido à consideração do bloco de beneficiamento *e à construção da* característica optimal, *a qual permite orientar a escolha do* projecto optimal *e, traduz, portanto a parametrização mais significativa.*

Mostra-se seguidamente que o controlo do desmonte é realizado após parques de homogenização e desenvolve-se a teoria básica que permite a avaliação das políticas de constituição e retoma de tais parques.

ABSTRACT

Some limitations are pointed out concerning the usual cut off criterion based on small blocks and respective crude ore grades.

By this via the concepts of beneficiation block *and* optimal characteristic *are built up. This characteristic is useful for framing the design of the optimal mining project. Thus, it is the convenient way for the parametric description of an ore body.*

It is also shown that the exploitation control is usually carried out on the output of a stockyard. The theoretical basis which governs the adequate stacking and reclaiming stockyard policies is developed.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Só em fase preliminar do planeamento da exploração de uma jazida se justifica reportarmo-nos à distribuição de teores exibida pelos troços dos testemunhos das sondagens S, visto que o respectivo histograma tem maior variância de dispersão do que o dos *blocos tecnológicos* V, sobre os quais se irá exercer a decisão de tratar ou não tratar ou ainda de como tratar o minério.

A conhecida relação de aditividade de Krige mostra como se relacionam as variâncias de dispersão em causa (1).

$$\sigma^2_{V/D} = \sigma^2_{S/D} - \sigma^2_{S/V}$$

Deve também notar-se que se sabe calcular $\sigma^2_{V/D}$, uma vez que, pelo menos, exista variograma e V seja uma partição de D ou ainda $V \ll D$:

$$\sigma^2_{V/D} = \overline{\gamma(D,D)} - \overline{\gamma(V,V)}$$

Por outro lado, se as sondagens forem suficientemente abundantes, os primeiros momentos espaciais das duas distribuições serão aproximadamente iguais:

$$\overline{Z}_v \simeq \overline{Z}_s$$

Ou, consequentemente, admitida a ergodicidade do primeiro momento:

$$E[Z_v] = E[Z_s]$$

Todavia, a estabilidade da lei de distribuição não se pode garantir (2), excepto no caso gaussiano que é anormal entre as variáveis regionalizadas, como se sabe.

Quer dizer que o histograma dos teores verdadeiro dos blocos V é, na maioria dos casos, inacessível.

O que se conhece é a distribuição dos seus estimadores, que, no que se segue, consideraremos estimadores de krigagem Z^*_v.

Assim, por definição de estimador não enviezado, como é o de krigagem, será:

(1) Aliás, a esta mesma conclusão se pode chegar sem recorrer à citada relação de Krige [5].

(2) É costume admitir-se a estabilidade da lei se: $\sigma^2_{KV} / D^2_V \leq 0.2$

$$E(Z_v) = E(Z_v^*)$$

Contudo, este estimador sub-estima a variância de dispersão dos teores reais, como mostra a *relação de atenuação* na sua expressão prática:

$$D_V^2 \simeq (D_V^2)^* + \overline{\sigma_{KV}^2}$$

$$D_V^2 = E\left[(Z_V - m)^2\right]$$

com:

$$(D_V^2)^* = E\left[(Z_V^* - m)^2\right]$$

$$\overline{\sigma_{KV}^2} = E\left[(Z_V - Z_V^*)^2\right] = 1/N \sum_i^N \sigma_{KV_i}^2$$

Portanto, o teor de corte baseado nos estimadores de krigagem dos teores dos blocos V pode, já por esta razão, não ter muito significado.

Porém, durante a exploração, admitindo mesmo que o bloco de decisão continua a ser o que foi como tal adoptado no planeamento, surge informação adicional que resulta da amostragem de controle que precede o *arranque* nas frentes.

Daí que aplicando mais uma vez a relação de aditividade, será, já que nova krigagem é possível:

$$D_V^2 = (D_V^2)^{**} + \overline{\sigma_{K_2V}^2}$$

e porque é certamente

$$\overline{\sigma_{K_1V}^2} \geq \overline{\sigma_{K_2V}^2}$$

ter-se-á:

$$(D_V^2)^{**} \leq (D_V^2)^*$$

Isto é, o teor de corte inicialmente escolhido tem pouco interesse ao nível da exploração, porque haverá que corrigi-lo à medida que a informação nova surja, o que não tem significado, já que o critério de rejeição é um conceito global e não local.

Para sair deste impasse, pode recorrer-se à *krigagem disjuntiva* com a qual, em situações favoráveis, é possível prever o histograma futuro dos teores dos pequenos blocos, condicionado pela informação de que se dispõe ao planear a exploração.

Não abordaremos aqui este importante progresso da Geoestatística mineira.

1.2. Por outro lado, o teor de corte baseado no teor tal-qual é, em geral, uma aproximação grosseira da análise económica que assume, posto que a margem monetária por unidade de peso de minério tal-qual calculada à saída do concentrador é:

$$b_V = R_V p c_V - (m+l)_V$$

$$= \eta_V p Z_V - (m+l)_V$$

Daí, que o *teor de corte económico* (baseado no critério *marginalista* mineiro) se não possa estabelecer com o teor tal-qual, embora razões tecnológicas, muitas vezes, exijam um primeiro nível de rejeição baseado naquele teor. Com efeito, a maioria dos processos de tratamento não pode garantir teor médio de concentrado acima de certo limite se o concentrador não for alimentado com teor médio tal-qual superior a determinado limiar.

Surge, todavia, desta análise, uma situação nova que importa explicitar.

Efectivamente, o rendimento em metal η_v, o rendimento em peso R_v e o teor do concentrado c_v determinados por ensaios padrão bem definidos (1), *quando reportados a resultados industriais*, são variáveis regionalizadas mais regularizadas do que o teor tal-qual.

Quer dizer, os variogramas respectivos têm amplitudes superiores àquela que exibe o de Z_v.

E por essa razão, induzem *volumes de influência* maiores. É, portanto, mais fácil encontrar similitudes utilizando parâmetros mineralúrgicos do que quando se lida com teores tal-qual para agrupar blocos formando «clusters» $\cup V$ coerentes que constituirão os *blocos de beneficiamento*.

Contudo, os processos industriais de que os referidos ensaios padrão pretendem ser as réplicas não são, como se sabe, operações totalmente determinísticas. Contêm, por isso, componentes aleatórias, certamente correlacionadas, em certa medida, com Z_v.

Quer isto dizer que os variogramas das variáveis reais η_v, R_v e c_v devem exibir significativo efeito de pepita.

Portanto, se se pretender estimar η_v, R_v e c_v tomando por suporte o volume V, que é normalmente pequeno, pois se trata do bloco de escolha de desmonte, é de esperar que as variâncias de krigagem aumentem sensivelmente em relação às dos teores tal-qual e, além disso, que o chamado efeito de «écran» se desvaneça acentuadamente, tornando os cálculos mais onerosos.

Deve, por isso, fazer-se a estimação baseada em blocos de volume $\cup V$ nitidamente superior aos usados quando se estima os teores tal-qual.

Todavia, a avaliação da massa mineral e do respectivo teor médio tal-qual, é óbvio que deve fazer-se à custa dos dados directamente obtidos na prospecção, pesquisa ou reconhecimento.

É de notar, porém, que muitas vezes não se ganha grande coisa em krigar, sendo preferível efectuar os cálculos baseando-nos nos volumes de influência: a variância da extensão à jazida do teor médio das sondagens conduzirá a erro razoável para o teor médio e massa mineral assim calculados.

1.3. Outro aspecto que é relevante, embora pouco referido, é que o histograma da jazida ou de parte importante da mesma não é estável às operações de desmonte, se se não tomarem cuidados apropriados

(1) Para cada tipo de minério que se haja caracterizado na jazida.

Daí, a vantagem, ou mesmo a necessidade de organizar a exploração tentando estabilizar o primeiro momento do teor do concentrado e, se possível, também o do rendimento em peso ou em metal respectivos, o que se consegue se se puder explorar réplicas da jazida ou de parte importante desta referidas a certas bases de tempo [2].

2. CARACTERÍSTICA OPTIMAL

2.1. Entende-se por parametrização o estabelecimento de bijecções entre a tonelagem tal-qual ou a massa mineral ou ainda o teor médio e determinado parâmetro de contrôle que pode ser o teor de corte do minério tal-qual, o teor de corte do concentrado, o valor de corte do rendimento em metal, etc.

Quando a parametrização se faz à custa das variáveis mineralúrgicas, põe-se o problema de escolher, para cada bloco de beneficiamento $\cup V$, o mais adequado ponto de funcionamento de forma a maximizar a margem monetária total não actualizada B, minimizando a perda em metal, uma vez fixadas a reserva total a explorar Q e a taxa de desmonte r.

Tem-se então:

$$B = Up - (f\,C + M(Q, r) + L(Q,r))$$

Considere-se, para resolver este problema, o espaço das *configurações mineralúrgicas* $T \times U$.

Trata-se, obviamente, do espaço dos estados do sistema jazida/beneficiamento.

Cada afixo $P \subset T \times U$ representa um ponto possível de funcionamento desse sistema, que resultará de explorar todos ou parte dos blocos de beneficiamento $\cup V$, realizando, em cada um deles, determinada operação mineralúrgica (considera-se, por razões metodológicas, como operações distintas, regulações diferentes do mesmo processo mineralúrgico).

Notar, que este espaço não inclui componente temporal, embora se possa falar em trajectória do afixo P, significando com isso que se adopta certa relação de ordem nas configurações possíveis do sistema.

Esta é, aliás, uma situação típica da programação dinâmica, quando aplicada à estrutura de um sistema susceptível de combinatória entre estados.

Assim, o estado inicial do sistema será definido pelo afixo $P_o(T_o, U_o)$: O estado inicial é, portanto, a imagem do minério *in situ*.

Muito raramente, como é sabido, esta configuração inicial é aceite pela tecnologia de juzante, quanto mais não seja porque T_o é inferior ao mínimo por ela exigido.

Há pois que considerar outro afixo P(T, U) para que aquele pre-requisito seja satisfeito.

Por isso se põe a questão de saber como organizar a exploração do sistema jazida/beneficiamento, de forma a passar de P_o a P com perda mínima em *metal* U, uma vez que se não conhecem processos de exploração sem perdas.

É óbvio, que a perda em metal será minimizada, se de P_o se passar a P seguindo a trajectória extremante (maximizante) da funcional linear

$$I = \int_{T_o}^{T} \left| \frac{dT}{dU} \right| dT$$

Trata-se claramente de um problema do cálculo das variações e, como tal, pode ser resolvido no domínio do contínuo.

Usar tal método implica, porém, interpolações analíticas das aplicações $R \rightarrow c$ trabalhosas e, como sempre, duvidosas, sem vantagem adicional, porquanto a classe dos processos mineralúrgicos praticamente admissíveis forma conjunto discreto finito.

Assim sendo, poder-se-ia, entre outros, usar o algoritmo de Bellman discreto, pois é válido o princípio da optimalidade.

Felizmente porque $R(\eta)$ é um convexo, mostra-se [3] que o conjunto de operadores

$$E = \left\{ \frac{\triangle^* R}{\triangle^* (Rc)} \right\}$$

construídos transferindo sucessivamente cada bloco de beneficiamento $\cup V$ do ponto de funcionamento correspondente a concentrado de teor mais baixo (e, portanto, de rendimento em peso mais elevado) para o ponto de funcionamento possível relativo ao teor imediatamente a seguir, fornece critério muito mais simples e muito menos oneroso para maximizar I.

Com efeito, estabelecida uma relação de ordem total em E, induz-se uma ordenação em {T}.

Assim, fixado T, basta procurar a $\mathcal{P}$ (E) $\subset$ E ordenada, cujo supremo conduz a atingir-se T.

Demonstra-se [3] que, deste modo, se alcança T com perda em metal U mínima:

$$\max (I \mid T) \rightarrow \sup \mathcal{P} \left\{ \frac{\triangle^* R}{\triangle^* (Rc)} \middle| T \right\}$$

Variando T, obtêm-se a bijecção optimal de U em C, a qual é, aliás, o *convexo superior* das configurações possíveis do sistema, projectado no espaço $U \times C$.

Aquela bijecção chama-se *característica optimal* [4], porque traduz a curva de Lasky generalizada optimal da jazida, tomando em consideração o desenvolvimento tecnológico coevo e a informação disponível.

2.2. Em relação a esta característica optimal da jazida, qualquer projecto de exploração fica definido pelos parâmetros

M(Q,r) + L(Q,r), que determinam a taxa de desmonte r em minério tal-qual a Q fixado, ou vice-versa;

(1) Notar que, no espaço $U \times C$ ξ representa uma recta de coeficiente angular f/p e de traço em U igual a (M+Q)/p.

p que reflecte o mercado; e

f que introduz a localização da jazida através o frete.

A margem monetária global não actualizada de qualquer projecto é expressa, no espaço U × C, por

$$B/p = U - \xi$$

$$\text{com } \xi^{(1)} = C\ f/p + (M(Q,r) + L(Q,r))/p$$

onde a parcela subtrativa representa os custos, expressos em unidades do valor *pro-rata* de metal contido no concentrado e B/p a margem global não actualizada expressa na mesma unidade (2).

Em relação a determinado projecto, o teor $\hat{T}$ optimal é o que corresponde a Sup $\{U - \xi\}$ e ao ponto de funcionamento $(\hat{U}, \hat{C})$ optimal.

Notar que pode dar-se o caso de ser, por toda a parte, $U - \xi$ negativo.

Num caso destes, não querendo funcionar com margem negativa (isto é, desenvolver actividade subvencionada), haverá que mudar de escalão de produção, aumentando-o para diminuir $M(Q,r) + L(Q,r)$, isto é, a despesa total de lavra e beneficiamento, fixado Q.

Em certos casos, por razões de integração na macro-economia, poderá não ser possível ou conveniente aumentar o escalão de produção. Haverá então que rejeitar blocos da jazida, mantendo r fixo.

Mostra-se [3] que a política que, neste caso, minimiza as perdas em metal, consiste em abandonar prioritariamente os blocos cujos teores dos concentrados são os menores.

Ao seguir-se tal política, Q deixa de estar fixado (porque diminui) e, portanto, mantendo-se r, $M(Q,r) + L(Q,r)$ diminui aproximadamente na proporção da variação de Q.

Nas aplicações, deseja-se conhecer M + L com o maior rigor possível, o que só se obtém elaborando ante-projecto ou projecto concreto.

Pode então utilizar-se qualquer *critério aceitável* de optimização da exploração, com Q livre, embora limitado superiormente à reserva avaliada mas com r fixado ou vice-versa, «mutatis mutandi».

Encontrar-se-á assim $(U - \xi)$ coerente com o critério adoptado. Contudo, se se quiser garantir, dentro de tal critério, perda mínima em metal, os blocos eventualmente a rejeitar deverão ser, prioritariamente, os de menor teor de concentrado no ponto de funcionamento correspondente à característica optimal teórica.

3. CONTROLE DE DESMONTE

Já se referiu que assegurar, para determinada base de tempo, que o minério que se extrai da jazida seja uma sua réplica, é condição necessária e suficiente para manter estáveis os histogramas.

É claro que esta prática implica *mistura de desmonte*, a qual, por si só, nada diz sobre a variabilidade do minério tal-qual extraído, considerada que seja outra base de tempo.

Trata-se de ponto que merece análise mais detalhada.

A variabilidade, em relação a um valor médio de qualquer parâmetro de controlo, avalia-se, como se sabe, pela variância, a qual só tem significado se se fixar:

— o suporte (ou incremento)

— o volume do lote (base de tempo)

— a localização, na jazida, dos múltiplos incrementos que irão constituir o lote.

A importância da localização resulta da acessibilidade na jazida não ser total e, por isso, os incrementos que constituem determinado lote a controlar não podem ser colhidos de forma uniformemente distribuída em toda a massa daquela, mas apenas em determinados painéis sucessivamente seleccionados e preparados para desmonte em consequência de constrangimentos vários.

Admita-se, pois, que se escolhem n painéis V_i cujos teores médios krigados são m_i^* e que deles se extraem volumes v_i na proporção p_i, cuja reunião constitui o lote, a dispersão do qual se deseja controlar. Sejam ainda os v_i partições de V_i ou $v_i \ll V_i$.

Se v_i, por hipótese, puder ocupar qualquer localização no painel V_i, os estimadores das respectivas dispersões de teor serão

$$\left[D^2(v_i)\right]^* = \sigma^2_{KV_i} + \overline{\gamma(V_i, V_i)} - \overline{\gamma(v_i - v_i)}$$

Portanto, o estimador da dispersão do teor do lote L (3) será

$$\left[D^2(L)\right]^* = \sum\left(p_i^2\left[D^2(v_i)\right]^*\right) : i \in (1 \ldots n)$$

Por outro lado, o estimador do teor médio de L será, obviamente,

$$\left[m(L)\right]^* = p_i\, m_i^*$$

Suponha-se também que os incrementos são sequencialmente depositados num parque, adequadamente manuseado, isto é, actuando como um operador linear contínuo (filtro linear).

Seja Z o parâmetro em contrôle (para concretizar, Z pode supor-se um teor).

Ter-se-á um fluxo de entrada no parque que se caracteriza pela série cronológica Z_e (t) e um fluxo de saída, pela série Z_s (t).

As massas ou volumes destes dois fluxos são iguais, em valor médio, calculado sobre base temporal adequada, embora possam apresentar taxas «instantâneas» distintas.

(1) Notar que, no espaço U × C, ξ representa uma recta de coeficiente angular f/p e de traço em U igual a (M+Q)/p.

(2) Ou em unidades monetárias usuais.

(3) L é, habitualmente, o volume ou massa da pilha constituída no parque.

Tesapack
um sistema de segurança para todas as embalagens.

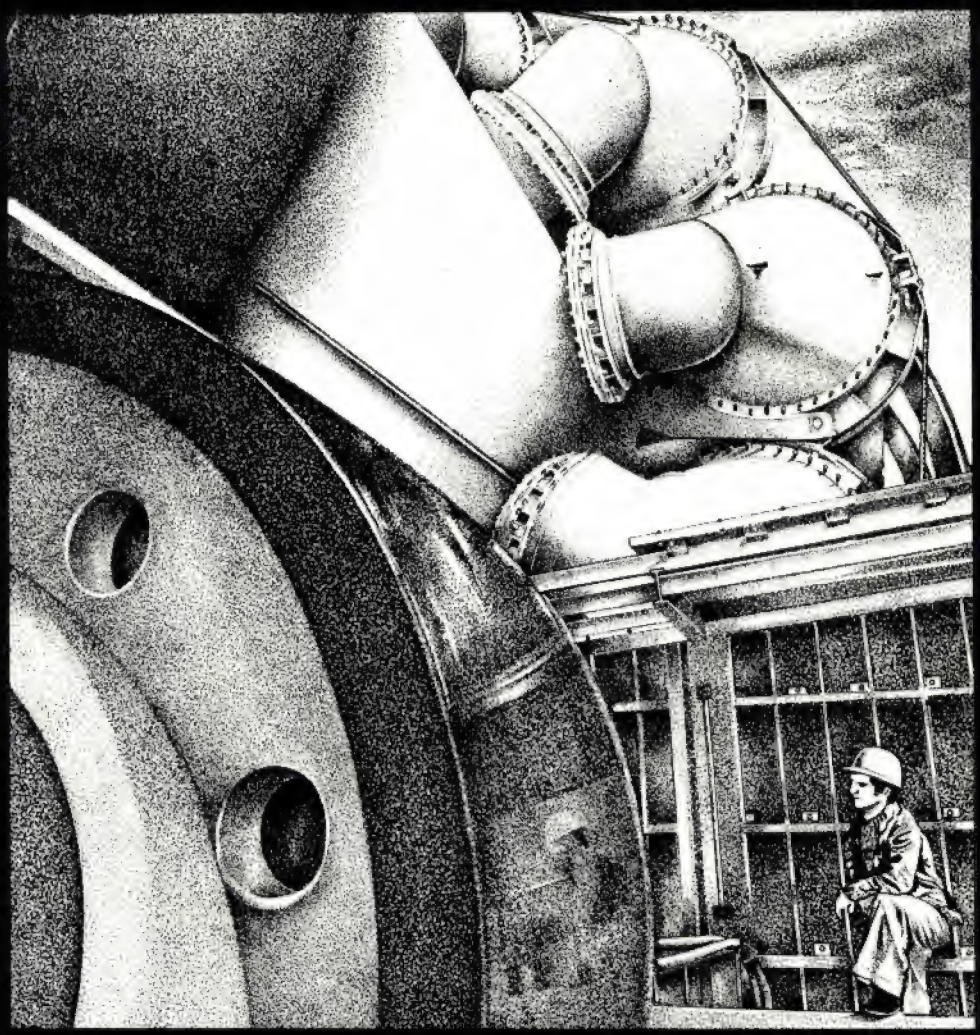
Não há embalagem que dispense um fecho inteiramente seguro. Para esse fim, é que existe Tesapack. A fita Tesapack, auto-adesiva, resiste nas embalagens de cartão fortes e espessas e mantém a sua aderência e elasticidade sob todas as condições atmosféricas. Para todas as embalagens, quer sejam grandes ou pequenas, largas ou estreitas, baixas ou altas, o sistema Tesapack – fitas e máquinas – oferece sempre um máximo de segurança.
Tesapack aumenta ainda a rentabilidade das linhas de embalagem, quer com máquinas simples, quer com máquinas automáticas de grande cadência. Tesapack, uma gama completa de fitas auto-adesivas para embalagens, em todas as indústrias.

tesa

DEPARTAMENTO INDÚSTRIA

Tesa, sempre a solução do seu caso

PARA MAIS INFORMAÇÕES CONSULTE O DEPARTAMENTO TESA DA BEIERSDORF PORTUGUESA, LDA.
Est. de Barcarena – Queluz de Baixo Tel. 956171 ou Delegação no Norte – R. Gonçalo Sampaio, 164-178 – Porto Tel. 691153/4/5



Cimentar o futuro do país... Cimpor

Para cimentar o futuro do País, a CIMPOR dispõe de seis Centros de Produção e nove Entrepostos, tem uma capacidade global de produção de 4.400.000 toneladas por ano e está a ampliar as suas instalações para mais um milhão de toneladas por ano.

A CIMPOR possui avançada tecnologia em equipamento e métodos de trabalho.

A capacidade de resposta da CIMPOR garante a qualidade do cimento produzido e uma cada vez maior facilidade de distribuição a nível nacional.

CIMPOR

Cimentos de Portugal, E.P.

Sede: Rua Braamcamp 7-1.º Lisboa 1-Tel. 59161/66
Teleg. CIMPOR/LISBOA-Telex. 12433 CIMPOR P

Por isso, e por ser mais significativo, é preferível substituir a variável tempo t pela variável q, significando massa ou volume:

$$Z_e(t) \rightarrow Z_e(q)$$
$$Z_s(t) \rightarrow Z_s(q)$$

Se o parque actua como um filtro, existe a seguinte relação entre as duas séries cronológicas:

$$Z_s(q) = \int_0^{\infty} Z_e(q)\, r_u(q-\tau)\, d\tau \simeq \int_{q-\Delta q}^{q} Z_e(q)\, r_u(q-\tau)\, d\tau$$

onde $r_u(q-\tau)$ é a resposta do parque à impulsão de Dirac centrada em q a qual, escoado Δq, praticamente se anula

Isto é,

$$Z_s(q) = Z_e(q) * r_u$$

é a regularizada de Z_e pela função de amostragem r_u.

Seja $R_u(h) = r_u * \check{r}_u$ o covariograma transitivo associado a r_u (q), será [1]:

$$\gamma_s(h) = \gamma_e(h) * R_u(h) - \underbrace{\int_{\Delta q}\int_{\Delta q} \gamma_e(q-q')\, r_u(q)\, r_u(q')\, dq\, dq'}_{K}$$

onde: $\gamma_s(h)$ e $\gamma_e(h)$ são os variogramas de Z_s e Z_e, respectivamente, calculados no suporte Δq

$R_u(h) = r_u * \check{r}_u = \int_{\Delta q} r_u(q)\, r(q+h)\, dq$, por definição

K é o valor médio do variograma γ_e, ponderado por $r_u(q).r_u(q')$ no suporte Δq; trata-se de uma constante que se pode determinar pela condição fronteira $\gamma_s(o) = o$, isto é, $K = \gamma_e(\ +o) * R_u(\ +o)$: É, pois, o efeito de pepita de γ_s no suporte Δq.

Por outro lado, a variância *pontual* do teor correspondente ao lote L será (1)

$$D_s^2(o/L) = \overline{\gamma_s(L,L)} = \overline{\gamma_s(h)^L}$$
$$= \overline{\gamma_e(h) * R_u(h)^L}$$
$$= \overline{\gamma_e(h)^L} * \overline{R_u(h)^L}$$

Se a resposta do parque, à impulsão de Dirac, for estável, será $R_u(h)$ constante.

Em qualquer caso, pode saber-se calcular ou medir(2) $\overline{R_u(h)^L}$.

Donde

$$D_s^2(o/L) = D_e^2(o/L) * \overline{R_u(h)^L}$$

Todavia, o que de facto se controla, por amostragem, é a variância de uma toma de volume ε. Será então:

$$D_s^2(\varepsilon/L) = D_s^2(o/L) - D_s^2(o/\varepsilon)$$
$$= \overline{\gamma_s(h)^L} - \overline{\gamma_s(h)^\varepsilon}$$

o que se sabe calcular, visto poder-se conhecer o variograma pontual do lote L à saída do parque, feita a desconvolução respeitante ao suporte Δp.

Vê-se assim, que a questão do controlo, se reduz à determinação do variograma da série cronológica de entrada $Z_e(t)$. Daí o interesse na fase de projecto, em utilizar as técnicas da simulação condicional, condicionada pela acessibilidade.

4. LISTA DE SIMBOLOS NÃO DEFINIDOS NO TEXTO

$\sigma_{V/D}$	— variância do teor tal-qual verdadeiro do bloco V na jazida D
$\sigma^2_{S/D}$	— idem da sondagem S
$\sigma_{S/V}$	— idem da sondagem S no bloco V
$\overline{\gamma(D,D)}$	— variograma médio da jazida D
$\overline{\gamma(V,V)}$	— » » do bloco V
$\overline{\gamma(V_i,V_i)}$, $\overline{\gamma(v_i,v_i)}$	— » » do bloco V_i ou v_i, respectivamente
$\overline{Z}_V$, $\overline{Z}_S$	— média espaciais de Z_v e Z_s, respectivamente, $E[Z_v]$, $E[Z_s]$..., esperanças de Z_v, Z_s, etc., respectivamente
$\overline{\sigma^2_{KV}}$	— variância média de krigagem do bloco V
D^2_V	— dispersão (variância *à priori*) dos teores verdadeiros

(1) Notar que, tratando-se de variância pontual, o efeito de pepita será nulo.

(2) Recorrendo, por exemplo a um analógico, método adoptado no Laboratório de Preparação de Minérios do I. S. T.

$(D_V^2)^*$, $[D^2(v_i)]^*$	— dispersão dos estimadores de krigagem dos teores de V e v_i, respectivamente
$m = E[Z_V]$	— esperança dos teores verdadeiros
σ^2_{KVi}	— variância de krigagem do bloco V_i
$(D_V^2)^{**}$	— dispersão dos estimadores de «segunda» krigagem
R_V	— rendimento em peso do concentrado obtido do bloco V
η_V	— rendimento em metal do concentrado obtido do bloco V
p	— valor da unidade do metal
c_V	— teor do concentrado obtido do bloco V
$(n + l)_V$	— custos de lavra e tratamento por unidade tal-qual do bloco V
C	— peso do concentrado global
U	— metal contido do concentrado global
f	— frete por unidade de peso do concentrado
M(Q, r) + L(Q, r)	— despesa global de lavra e tratamento, fixadas Q e r.
T	— teor do concentrado global
R	— rendimento em peso do concentrado genérico
c	— teor do concentrado genérico
m_i^*	— estimador do teor médio do bloco v_i
p_i	— proporção do bloco v_i na constituição do parque L

5. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] **Materom, G. 1965** — Les variables régionalisées et leur estimation. Masson etc.te — Paris.

[2] **Rogado, J. Q.** et al., **1971** — Um método de programação de desmontes. 1.º Congresso Hispano-Luso-Americano de Geologia Aplicada, Tomo II. P-4-40 — Lisboa-Madrid.

[3] **Rogado, J. Q. 1975** — Sequential optimization methal for dressing central of ore bodies (I): 7.º Mining Pribram in Science and Technique, Pribram, Checoslováquia.

[4] **Rogado, J. Q. 1975** — Sequential optimization method for dressing central of ore bodies (II). 13th APCOM, Claustal, Rep. Fed. Alemanha.

[5] **Shurtz, R. F. 1959** — The electronic computer and statistics for predicting ore recovery. AIME trans., 214 — U. S. A.

Alguns artigos publicados em TÉCNICAS anteriores:

J. Quintino Rogado — Aproximações sucessivas de Hardy Cross, TÉCNICA N.º 169, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Laboratório de tratamento de minérios, TÉCNICA N.º 188, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Nota sobre a lei de distribuição de Ahrens (aplicação a um caso concreto), TÉCNICA N.º 273, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Prospecção gravimétrica — o problema da interpretação, TÉCNICAS N.ºs 275, 276, 277 e 278.

J. Quintino Rogado — A energia de fragmentação, TÉCNICA N.º 283, Lisboa.

J. Quintino Rogado — O laboratório de tratamento de minérios do I. S. T., TÉCNICA N.º 294, Lisboa.

J. Quintino Rogado — A previsão dos resultados na hidroclassificação, TÉCNICA N.ºs 295 e 296.

J. Quintino Rogado — Introdução à estratificação, TÉCNICA N.º 318, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Um princípio de sobreposição — a expressão geral da energia de fragmentação, TÉCNICA N.º 324, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Sobre a reestruturação da carreira docente nas universidades portuguesas (dedicação exclusiva; natureza dos cursos; autonomia), TÉCNICA N.º 433, Lisboa.

J. Quintino Rogado — Nota sobre a apropriação dos recursos naturais. Programador nacional dos empreendimentos mineiros, TÉCNICA N.º 434, Lisboa.

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.28:622

Teoria e prática de amostragem de materiais a granel segundo o formalismo de P. Gy

JOÃO CARVALHO MARQUES (1)

RESUMO

Explicam-se os mecanismos geradores dos diferentes erros de amostragem, identificam-se as variáveis de que dependem, estimam-se os seus dois primeiros momentos e determinam-se as «qualidades» que uma amostragem deve possuir e como se pode, na prática, assegurar-lhas. São analisados os processos fundamentais de amostragem — partilha e implantação de incrementos — através de dois modelos matemáticos: Modelo Probabilista e Modelo de Integração, utilizando a Estatística Clássica e Geoestatística.

Apresentam-se exemplos de aplicação a materiais a granel da indústria mineira, nomeadamente concepção e cálculo de instalações automáticas de amostragem.

Tem, contudo, maior generalidade, sendo aplicável a materiais a granel de outras indústrias, nomeadamente metalúrgica, química, farmacêutica, agrícola e alimentar, do cimento, do vidro, da cerâmica e do papel, a resíduos urbanos e industriais e ainda a materiais contínuos, sólidos ou líquidos, como chapas, barras, lingotes e produtos metalúrgicos fundidos em deslocamento.

ABSTRACT

The paper explains all types of sampling errors and estimates their first and second moments. It defines the «qualities» and the rules to respect in sampling procedure.

The main sampling procedures are studied through two mathematical models: Probabilistic and Integration Models, developed by Classical Statistics and Geostatistics.

Applications to bulk materials of mining industry namely predesign of automatic sampling plants.

The models can be applied to bulk materials of many other industries such as Metalurgical, Chemical, Food, Agriculture, Concrete, Glass, Ceramics and Paper, to industrial and city wastes and even to continuos solid and liquid materials such as ingots, rods, bars, steel plates and fused metalurgical products in continuos mooving.

INTRODUÇÃO

A amostragem tem uma importância fundamental quer técnica (controlo de qualidade) quer económica (2) e é incontestavelmente uma realidade complexa.

Efectivamente, a amostragem, no sentido lato, divide-se num certo número de andares, a saber:

* andares de amostragem propriamente dita;
* andares de fragmentação;
* andares auxiliares (homogeneização, secagem, manuseamento, etc.),

terminando pela determinação dum *parâmetro de qualidade* (análise química ou granulométrica, teor de humidade, etc.) objectivo final de toda a operação de amostragem.

Do ponto de vista teórico, só os andares de amostragem propriamente dita provocam erros de amostragem. Na prática, todos os andares sem excepção, todos os manuseamentos a que se submete o lote e suas amostras sucessivas podem introduzir erros, pois há sempre o risco de alteração do material a amostrar (quer por perda de fracções, quer por adição de materiais estranhos, quer por modificações de estrutura, quer ainda por erros involuntários e até voluntários). Como o nosso objectivo é procurar criar um modelo geral de amostragem, desprezaremos provi-

(1) Investigador do C. V. R. M. U. L. e Docente do I. S. T.

(2) A Produção Mundial anual de matérias-primas minerais sólidas representa cerca de 2 % do Produto Mundial Bruto.

soriamente todos estes erros operatórios, embora nunca esqueçamos a sua existência.

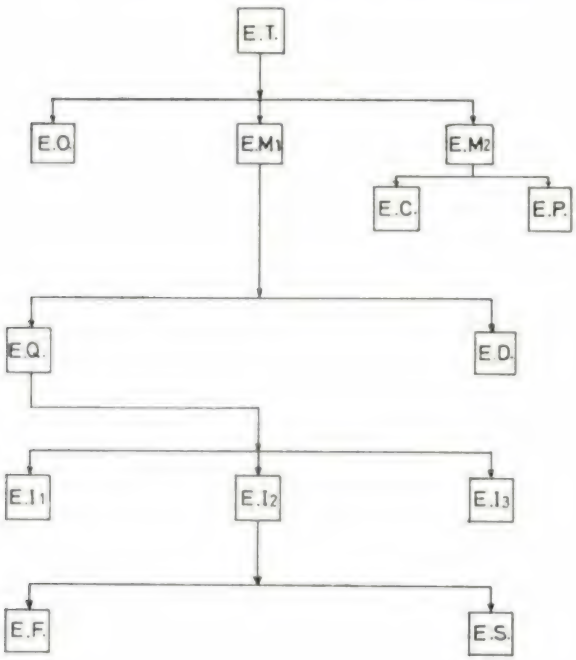
A amostragem, no sentido restrito, será analisada nos seus dois processos fundamentais — o processo de implantação de incrementos e o da partilha — aplicados respectivamente a lotes não manipuláveis e manipuláveis.

O processo de implantação de incrementos será ainda estudado através de dois modelos teóricos: «Modelo de Integração» e «Modelo Probabilista». Cada um destes modelos interpreta a realidade consoante a óptica, contínua ou descontínua em que é encarado o lote, resultante da ambivalência da natureza da matéria ou, se quisermos, do maior ou menor recuo com que analisamos a realidade.

Veremos pois que, em cada andar de amostragem — amostragem no sentido restrito — podem ocorrer diferentes tipos de erros que, no caso mais geral, constituem o erro total.

De forma esquemática indicam-se os erros que integram o modelo geral da amostragem e cuja simbologia é a seguinte:

ET — Erro total
EO — Erros operatórios
EM_1 — Erros do modelo
EM_2 — Erros de materialização
EC — Erro de «découpe»
EP — Erro de toma
EQ — Erro de flutuação de qualidade (a(x))
ED — Erro de flutuação do caudal (erro de ponderação)
EI_1 — Erro de integração do termo regionalizado
EI_2 — Erro de integração do termo local
EI_3 — Erro de integração do termo periódico
EF — Erro fundamental
ES — Erro de segregação e agrupamento



Os erros de ponderação e de integração dos termos regionalizado e periódico são estudados através o modelo de integração.

Os erros de materialização, fundamental e de segregação são estudados no modelo probabilista, se bem que o erro de integração do termo local também seja analisado à luz do modelo de integração.

1. ANÁLISE GERAL DO PROBLEMA

1.0 — O modelo geral aplica-se aos andares de amostragem propriamente dita, ou seja, à operação, no decurso da qual, sem alterar a sua estrutura, se extrai duma certa massa de matéria, uma fracção suposta representativa daquela

1.1 — Propriedades gerais dos lotes de material a granel

1.1.1 — Definição dum lote de material a granel

a) Na sua definição contínua o lote é considerado:

* geometricamente: como o conjunto de pontos x interiores a um certo domínio D_L do espaço considerado.

* Fisicamente: como o conjunto dos valores tomados por um grupo de funções descritivas da matéria, presente em cada um dos pontos x interiores a um certo domínio D_L do espaço considerado.

b) Na sua definição descontínua o lote é considerado:

* geometricamente: como um conjunto discreto de subconjuntos contínuos. Cada subconjunto pode conter quer um fragmento único, quer um grupo de fragmentos.

* Fisicamente: como o conjunto dos valores tomados, pada cada um dos subconjuntos contínuos, por um grupo de parâmetros descritivos da matéria constitutiva.

1.1.2 — Expressão do teor dum lote de material a granel

1.1.2.1 — Meio contínuo

Se a_L é o teor do lote L em constituinte crítico A, poderemos escrever:

$$a_L = \int_{D_L} a(x)\,\mu(x)\,dx \Big/ \int_{D_L} \mu(x)\,dx$$

ou seja, é a média ponderada da função indicatriz a (x) — teor, em constituinte A, no ponto x, sendo a

função ponderada $\mu(x)$ — massa de sólidos por unidade de espaço.

Por unidade de espaço entende-se:

unidade de volume: lotes com três dimensões espaciais;
unidade de superfície: lotes com duas dimensões espaciais;
unidade de comprimento: lotes com uma dimensão espacial;
unidade de tempo: lotes com uma dimensão temporal.

1.1.2.2 — Meio descontínuo

(i) — Se considerarmos o lote como um conjunto de um número N de grupos de fragmentos G_n (caso dos lotes de zero dimensões) teremos:

$$a_L = \sum_n a_n M_n \Big/ \sum_n M_n$$

em que:

a_L — teor em A do Lote L;
a_n — teor em A de G_n;
M_n — massa de G_n.

(ii) — Se considerarmos o lote como um conjunto de N_L fragmentos teremos:

$$a_L = \sum_i a_i M_i \Big/ \sum_i M_i$$

em que:

a_L — teor em A do lote L;
a_i — teor em A do fragmento F_i;
M_i — massa de F_i.

1.2 — Critérios de apreciação de uma amostragem

Tendo a amostragem por objectivo a estimação de um parâmetro de qualidade desconhecido dum lote L e sendo ela uma operação aleatória, como tal geradora de erros, analisemos quais as propriedades de que deve gozar uma «boa» amostragem.

1.2.1 — Propriedades definidas «à priori»

São as qualidades que devem possuir os aparelhos de amostragem e que devem ser respeitadas aquando da sua concepção e realização. A qualidade fundamental é a *correcção* que se define como:

* óptica contínua: quando assegura uma densidade uniforme de probabilidade de colheita em todo o domínio D_L e nula no seu exterior.
* óptica descontínua: quando assegura uma probabilidade uniforme de colheita a todos os fragmentos que constituem o lote L.

A amostragem diz-se incorrecta quando não assegura uma probabilidade uniforme de colheita.

1.2.2 — Propriedades definidas à «posteriori»

São aquelas que contam para o utilizador. Sejam:

a_L — teor de L em constituinte A
E — uma amostra extraída de L
a_E — teor de E em constituinte A
e — erro de amostragem em constituinte A

$$e = a_E - a_L$$

Como já é sabido, na prática, a amostragem nunca é rigorosamente justa. Assim, consoante os objectivos, teremos:

(i) — amostra comercial de rotina, entre um mesmo comprador e um mesmo vendedor: a principal qualidade deverá ser a equitabilidade para o que é condição suficiente, mas não necessária, a amostragem ser justa — $m(e) = 0$ — quando o teor é função linear do valor comercial.

(ii) — Amostra técnica de rotina (controlo de qualidade). Interessa principalmente a fidelidade — $\sigma(e) \leqslant \sigma_0$.

(iii) — Amostra isolada com objectivos técnicos ou comerciais. Interessa a precisão — $m(e) = 0$ e $\sigma^2(e) \leqslant \sigma_0^2$ — ou, pelo menos, a representatividade — $m(e^2) = \sigma^2(e) + m^2(e) \leqslant R_0^2$.

Do ponto de vista prático, justiça e fidelidade só são parcialmente dissociáveis porquanto os erros mais graves, que surgem quando a amostragem é incorrecta, afectam-nas simultaneamente. Assim, o objectivo fundamental deverá ser a correcção que constitui a única garantia de representatividade. Como segundo objectivo teremos a fidelidade.

Tudo o que se segue será consagrado a determinar as condições de *correcção e fidelidade*, numa palavra, de *representatividade* de uma amostragem.

1.3 — Análise dos processos de amostragem. Introdução aos modelos de amostragem

1.3.0 — Todos os aparelhos e métodos de amostragem são baseados em um dos dois processos seguintes: processo de implantação de incrementos e processo de partilha

Ambos se encontram esquematizados na figura 1. Os primeiros aplicam-se a lotes não manipuláveis e ainda a certos tipos de lotes manipuláveis (ex.: correias transportadoras e tomas para análise química). Os segundos aplicam-se exclusivamente a lotes manipuláveis.

1.3.1 — O Processo de Implantação de Incrementos

Pode-se decompor o processo de implantação de incrementos num certo número de operações elementares como segue:

(i) — *Integração:* é a selecção, no domínio D_L ocupado pelo lote L e segundo uma lei definida, dum certo número Q de pontos que constituem os incrementos pontuais.

(ii) — *«Découpe»*: é a aplicação, em cada um dos incrementos pontuais, dum certo volume a que chamaremos «découpe» e que delimita um incremento modelo.

(iii) — *Toma:* consiste na materialização da extracção dos fragmentos contidos nos incrementos modelo. Na toma obtêm-se os incrementos reais.

(iv) — *Reunião:* é a operação que conduz à amostra real através o agrupamento dos incrementos reais. É uma operação exacta na sua essência.

Destas quatro operações elementares apenas a integração constitui uma amostragem propriamente dita. As operações subsequentes limitam-se a materializar a amostra pontual.

1.3.1.1 — Integração

O processo de integração insere-se na óptica contínua já apresentada.

Seja:

L: Lote de material (a granel ou compacto) a avaliar;

D_L: Domínio ocupado por L no espaço R^p ($p = 1, 2, 3$);

x: Um ponto R^P

a(x): Teor no ponto x;

$\mu(x)$: Massa por unidade de espaço no ponto x;

x_q: Um ponto de D_L seleccionado, segundo uma certa lei de probabilidade, para constituir um incremento pontual;

Q: Número de incrementos pontuais;

E: Amostra pontual formada pela reunião de Q incrementos pontuais;

a_L: Teor de L em constituinte crítico.

a_E: Teor de E em constituinte crítico.

Por definição:

$$a_L = \int_{D_L} a(x)\,\mu(x)\,dx \Big/ \int_{D_L} \mu(x)\,dx$$

$$a_E = \sum_q a(x_q)\,\mu(x_q) \Big/ \sum_q \mu(x_q)$$

A análise destas duas expressões mostra que a operação que consiste em considerar a_E como estimador de a_L se assemelha muito estreitamente com a estimação por pontos de um integral.

Designa-se por lei de integração, a lei segundo a qual são designados os Q pontos x_q. As leis mais usuais são:

* integração sistemática com implantação aleatória;
* integração aleatória estratificada;
* integração aleatória.

O modelo de amostragem que estuda o processo de integração é o modelo de integração, que se apoia na definição contínua do material a granel e na caracterização da heterogeneidade geral de distribuição. Poderá pois aplicar-se a todos os meios materiais, desde os sólidos compactos aos líquidos, passando pelas associações gás-sólido, líquido-sólido e líquido-líquido.

Pode ainda dizer-se que o modelo de integração é o estudo do problema com um certo recuo, numa escala tal que a estrutura fragmentária da matéria se desvanece, para melhor revelar a estrutura em grande escala da distribuição espacial ou temporal.

1.3.1.2 — «Découpe»

A operação pontual de integração, sendo matematicamente fácil de tratar, é materialmente irrealizável. Será necessário pois materializar os pontos de colheita o que é habitualmente feito em duas etapas: uma geométrica («découpe») e outra material (toma).

Considere-se um certo domínio D_G do espaço R^P, definido em forma, dimensão e orientação, e pequeno comparado a D_L a que chamaremos «découpe» (ou volume regularizador ou de suporte) e que é aplicado a cada um dos Q pontos x_q.

O incremento modelo é constituído pelo conjunto dos fragmentos cujo baricentro está no interior da «découpe» modelo.

A amostra modelo resulta da reunião dos *incrementos modelo.*

A «découpe» não é uma amostragem. No entanto é uma operação aleatória que convém representar por um modelo. Como ela define um grupo de frag-

ESQUEMATIZAÇÃO DOS DOIS PROCESSOS DE AMOSTRAGEM

(Segundo P.Gy)

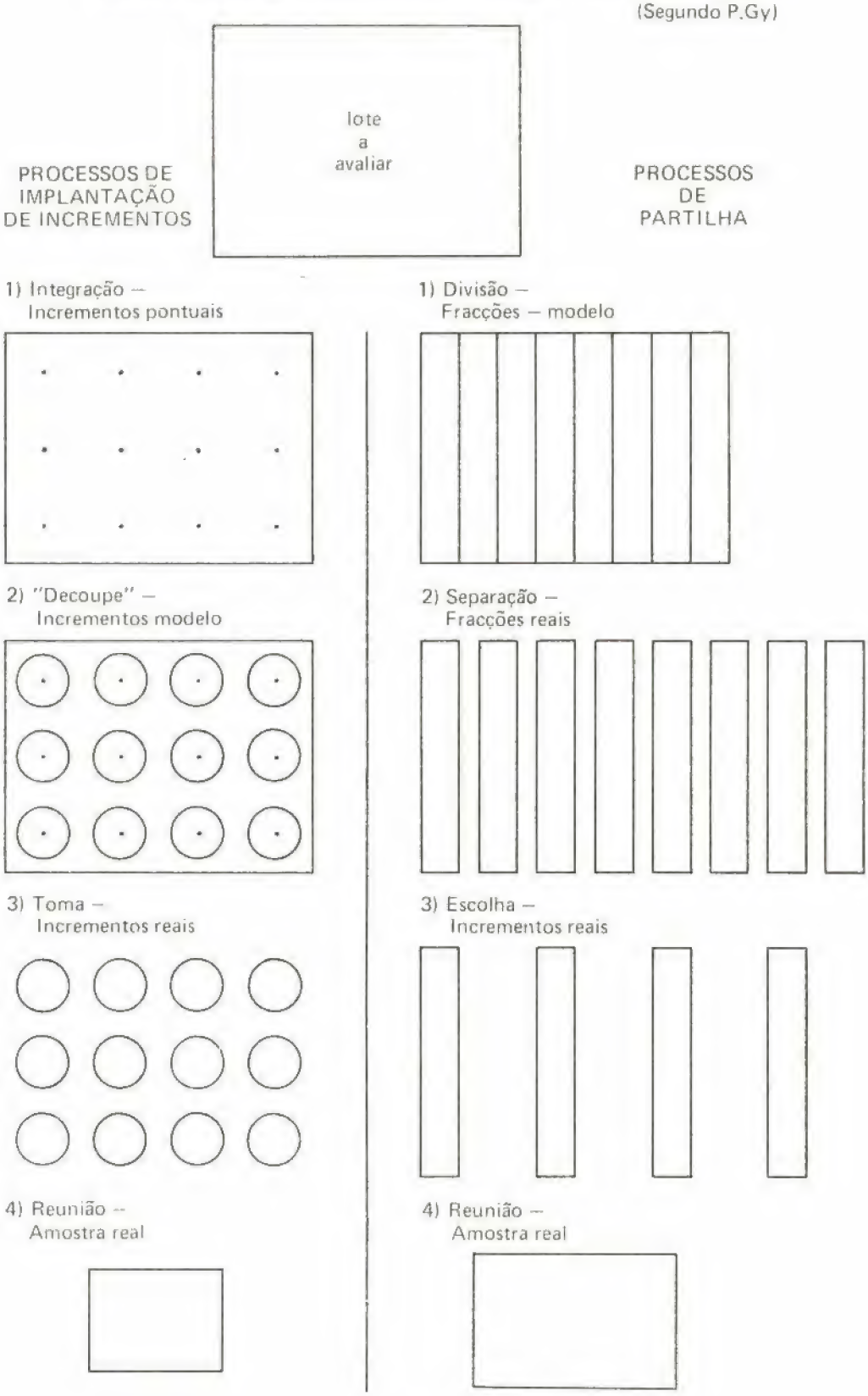


Fig. 1

mentos, poderá ser encarada, dada a sua ambivalência, segundo duas perspectivas:

a) Perspectiva contínua

Se considerarmos D_C como o domínio regularizador, quando $D_C \ll D_L$, teremos:

$$a_L = \int_{D_L} a_c(x)\, \mu_c(x)\, dx \Big/ \int_{D_L} \mu_c(x)\, dx$$

$$a_E = \sum_q a_c(x_q)\, \mu_c(x_q) \Big/ \sum_q \mu_c(x_q)$$

A estimação de a_L, com a ajuda de a_C é uma integração que faz intervir as funções regularizadas, e não as funções pontuais. Como os variogramas experimentais são obtidos a partir de funções regularizadas (o suporte nunca é pontual) pode-se afirmar que o o modelo de integração regularizado cobre simultaneamente a integração e a «découpe».

b) Perspectiva descontínua

A especulação sobre a probabilidade de colheita dos fragmentos que compõem a «découpe» e respectiva amostragem pode ser feita com a ajuda do *modelo probabilista*, o qual se subdivide em dois submodelos:

* modelo probabilista simples, no qual cada fragmento F_i de L intervém individual e independentemente com uma certa probabilidade P_i de ser colhido;
* modelo probabilista composto no qual cada grupo G_n de fragmentos, suposto indivisível, intervém individual e independentemente com uma certa probabilidade P_n de ser colhido.

O problema da «découpe» situa-se a nível do modelo probabilista composto.

1.3.1.3 — Toma

É a operação material que permite extrair os incrementos reais. O problema do erro de toma está inteiramente ligado ao respeito ou desrespeito da regra do ressalto(1). Na prática a toma é sempre uma operação aleatória.

Se a regra do ressalto fosse rigorosamente cumprida, a probabilidade de colheita P_i de um fragmento contido na «découpe» seria igual a 1, e igual a 0 a probabilidade de colheita de um fragmento exterior à «découpe».

A toma é pois analisada no âmbito do modelo probabilista simples.

1.3.2 — Processo de Partilha

Os seus protótipos são a amostragem através de um amostrador Jones ou por pazada alternada.

Pode-se decompor um processo de Partilha numa sequência de operações elementares, a saber:

(i) — Divisão: é a demarcação do domínio ocupado pelo lote, através a delimitação de um certo número de subdomínios complementares, de extensão igual ou desigual, que constituem as fracções modelo.

(ii) — Separação: é o isolamento das diferentes fracções-modelo que se transformam em fracções reais.

(iii) — Escolha: é a selecção, segundo uma lei definida, das fracções reais que constituirão os incrementos reais.

(iv) — Reunião: é a operação que conduz à amostra real, por agrupamento dos incrementos reais.

Na realidade, a divisão é assimilável à «découpe», a separação à toma, a escolha à integração e a reunião à reunião. Assim, tudo o que se disse no Capítulo 1.3.1 se aplica «mutatis-mutandis» ao processo de Partilha.

1.3.3 — Conclusões

As operações elementares dos dois processos de amostragem estão incluídas no âmbito de dois modelos de amostragem:

* O modelo de integração que constitui o prolongamento da definição contínua da matéria, a granel ou não;
* O modelo probabilista que constitui o prolongamento da definição descontínua da matéria a granel e que se subdivide em dois submodelos: o simples e o composto:

(i) — No âmbito do modelo de integração, o lote L a avaliar é considerado como o conjunto de pontos x interiores a um certo domínio fechado $D_L \subset R^P$. Cada ponto x é suficientemente caracterizado pelos valores de duas funções: a(x) teor e $\mu(x)$ massa por unidade de espaço (ou de tempo);

(ii) — No âmbito do modelo probabilista simples, o lote L é considerado como um conjunto discreto de N_L fragmentos F_i. Cada fragmento F_i de L é suficiente-

(1) Regra segundo a qual os fragmentos ao chocarem sobre uma aresta horizontal ressaltam para o lado em que se encontra o seu baricentro.

mente caracterizado pelo valor de dois parâmetros: a sua massa M_l e o seu teor a_l;

(iii) — No âmbito do modelo probabilista composto, o lote L é considerado como um conjunto discreto de N grupos de fragmentos G_n supostos indivisíveis. Cada grupo G_n é suficientemente caracterizado pelos valores de dois parâmetros: a sua massa M_n e o seu teor a_n.

2. HETEROGENEIDADE DE UM LOTE DE MATERIAL A GRANEL

2.0 — Introdução

A amostragem dum material rigorosamente homogéneo é uma operação exacta. Os erros de amostragem são devidos à heterogeneidade da matéria e a sua multiplicidade está logicamente relacionada com a multiplicidade de formas de que a heterogeneidade se pode revestir.

Daí ser lógico começar por aprofundar a noção de heterogeneidade antes de desenvolvermos os modelos de amostragem.

2.1 — «Aproach» qualitativo da noção de heterogeneidade

* Diz-se que um lote de material contínuo (a granel) goza de constituição homogénea quando todos os seus elementos constitutivos (fragmentos que o compõem) são idênticos entre si. Caso contrário, diz-se que possui uma constituição heterogénea.
* Diz-se que um lote de material, contínuo ou a granel, goza de distribuição homogénea quando um volume corrente, de dimensões constantes, levado a ocupar todas as posições possíveis no espaço do lote, possui uma composição média constante.

Pode pois dizer-se:

— A heterogeneidade de constituição é uma característica intrínseca e inalterável da matéria, sobre a qual a homogeneização não tem qualquer influência.

— A homogeneidade de distribuição é função da heterogeneidade de constituição, da distribuicão espacial dos fragmentos e da escala de observação, ou seja, da dimensão do volume corrente. O seu limite superior é a heterogeneidade de constituição.

2.2 — Classificação e propriedades das distribuições de fragmentos

2.2.1 — Introdução

Embora nos interesse mais particularmente a função a(x), as conclusões são também válidas para a função $\mu(x)$.

O espaço no qual existem os lotes está mergulhado no campo gravítico, pelo que é inevitável que a segregação gravítica tenda a classificar verticalmente os fragmentos de acordo com a sua dimensão, massa volúmica, etc., sendo a principal responsável pela alteração da homogeneidade de distribuição.

A classificação que se indica parte da ordem perfeita, que corresponde a uma segregação completa e a uma relação biunívoca entre a personalidade de um fragmento e a sua posição no lote e chega à desordem perfeita que corresponde a uma correlação nula entre a personalidade de um fragmento e a sua posição.

Os casos práticos estão obviamente situados entre estes dois limites e são [1]:

* Desordem local sobreposta a uma ordem profunda;
* Ordem relativa;
* Desordem local sobreposta a uma ordem relativa (distribuição ordenada);
* Ordem relativa delineada e redistribuída;
* Desordem local sobreposta a uma ordem relativa delineada e redistribuída (distribuição desordenada);
* Distribuições periódicas.

2.2.2 — Expressão mais geral de a(x)

No caso mais geral pode-se decompor a função a(x) numa soma de quatro termos:

$$a(x) = a_L + a_1(x) + a_2(x) + a_3(x)$$

em que:

a_L — constante e igual ao teor médio do lote L
$a_1(x)$ — componente não periódico de ordem (termo regionalizado)
$a_2(x)$ — componente de desordem (termo local)
$a_3(x)$ — componente periódico de ordem (termo periódico)

Alguns destes componentes podem ser nulos.

No quadro 1 indicam-se resumidamente as características das principais distribuições.

2.2.3 — Hipótese ergódica e estacionária

As hipóteses ergódica (similitude entre a média temporal e a média estatística) e de estacionaridade da média e da variância só poderão ser consideradas

[1] Para mais detalhes vide Bibl. 22 (pgs. 16 a 27).

válidas para a(x), quando o lote tiver sido submetido a uma tentativa de homogeneização. Contudo, são perfeitamente aceitáveis para a função a(t) quando se trata de um tal-qual de mina, um concentrado ou estéril duma lavaria, uma alimentação duma metalurgia, um minério comercial, da alimentação duma fábrica de cimento, de vidro ou de cerâmica, etc.

2.3 — Caracterização da heterogeneidade geral de distribuição

2.3.1 — Definição do variograma integral

G. Matheron mostrou que era possível caracterizar uma distribuição através da função intrínseca ou semi-variograma e a partir dele deduzir a dispersão dos erros de amostragem.

QUADRO 1

RESUMO DAS DISTRIBUIÇÕES

Distribuição	Completamente ordenada	ORDENADA		Desordenada	Completamente desordenada
		Não periódica	Periódica		
$a_1(x)$	Não nulo monótono	Não nulo não monótono	Nulo ou não nulo e não monótono	Identicamente nulo	
$a_2(x)$	Qualquer				Mínimo
$a_3(x)$	Identicamente nulo		Não nulo	Identicamente nulo	

2.2.4 — Propriedades dos componentes de a(t)

$a_1(t)$ — componente estocástico a longo termo. Traduz as tendências profundas da a(t) bem como a continuidade das variações a grande escala. A sua curva representativa é contínua e desenvolve-se em torno de constante a_L. É integrável e independente do suporte D_C.

$a_2(t)$ — componente estocástico a curto termo. Traduz os fenómenos locais, as perturbações a pequena escala e a natureza discreta da matéria. Representa-se por uma linha quebrada em torno de $a(t)+a_1(t)$. É integrável e depende do suporte D_C.

$a_3(t)$ — componente periódica. Pode pôr-se sob a forma duma soma de teores do tipo

$$a_3(t)=a_3 \text{ sen } \omega t+a'_3 \cos \omega t$$

É contínua, integrável e independente de D_C.

Seja:

L — Lote de minério a granel em deslocamento

D_L — A duração do deslocamento de L (1)

θ — Intervalo de tempo

a(t) — O teor do material que se desloca no instante t.

$\delta(t,\theta)$ — O acréscimo algébrico da função a(t) entre os instantes $t-\theta/2$ e $t+\theta/2$

$$\delta(t,\theta) = a(t+\theta/2) - a(t-\theta/2)$$

$V(\theta)$ — O semi-variograma integral de a(t)

$$V(\theta)=\lim_{D_L\to\infty} \frac{1}{2D_L}\cdot\int_{D_L} \delta^2(t,\theta)\,dt$$

(1) Supor-se-á a origem dos tempos coincidente com a origem do deslocamento.

2.3.2 — Propriedades do variograma integral [1]

(i) — Atendendo a que

$$a(t) = a_L + a_1(t) + a_2(t) + a_3(t)$$

teremos:

$$V(\theta) = \sum_j V_j(\theta) + \sum_j \sum_{j'} V_{jj'}(\theta)$$

Se considerarmos que a(t) é estacionária no 2.º momento e ergódica e que, em cada instante, as realizações dos componentes $\delta_j(t, \theta)$ são independentes, podemos concluir que $V_{jj'}(\theta) = 0$ e que

$$V(\theta) = \sum_j V_j(\theta)$$

(ii) — Se for: $\rho_j(\theta)$ o coeficiente de autocorrelação à escala do intervalo θ e σ_j^2 a esperança matemática de $a_j^2(t)$, teremos:

$$V_j(\theta) = [1 - \rho_j(\theta)]\,\sigma_j^2$$

Para j=1 e 2, teremos:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \rho_j(\theta) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant V_j(\theta) \leqslant \sigma_j^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\theta \to \infty} \rho_j(\theta) = 0 \\ \lim\limits_{\theta \to \infty} V_j(\theta) = \sigma_j^2 \end{cases}$$

(iii) — Propriedades de $V(\theta)$ e seus componentes. O variograma $V(\theta)$ e seus componentes gozam das seguintes propriedades:

1) — $0 \leqslant V_1(\theta) \leqslant \sigma_1^2$; $\lim\limits_{\theta \to 0} V_1(\theta) = 0$;

$\lim\limits_{\theta \to \infty} V_1(\theta) = \sigma_1^2$

2) — $\forall\, \theta > \varepsilon$; $V_2(\theta) = \sigma_2^2$

3) — $V_3(\theta) = \sigma_3^2(1 - \cos \omega\theta)$

4) — $V(\theta) = V_1(\theta) + V_2(\theta) + V_3(\theta)$

$\lim\limits_{\theta \to \varepsilon} V(\theta) = \sigma_2^2$; $\forall\, \theta > \theta_p \Rightarrow V(\theta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\,(1 - \cos \omega\theta)$

Nas figs. 2 e 3 estão indicados alguns exemplos de variogramas (segundo P. Gy).

2.3.3 — Determinação experimental do variograma

Distinguiremos as seguintes formas do variograma:

(i) — Variograma integral $V(\theta)$. É a função definida acima;

(ii) — Variograma discreto $V'(j\theta_1)$. É o estimador pontual do variograma integral[2];

VARIOGRAMA V(θ) E SEUS COMPONENTES
CASO GERAL

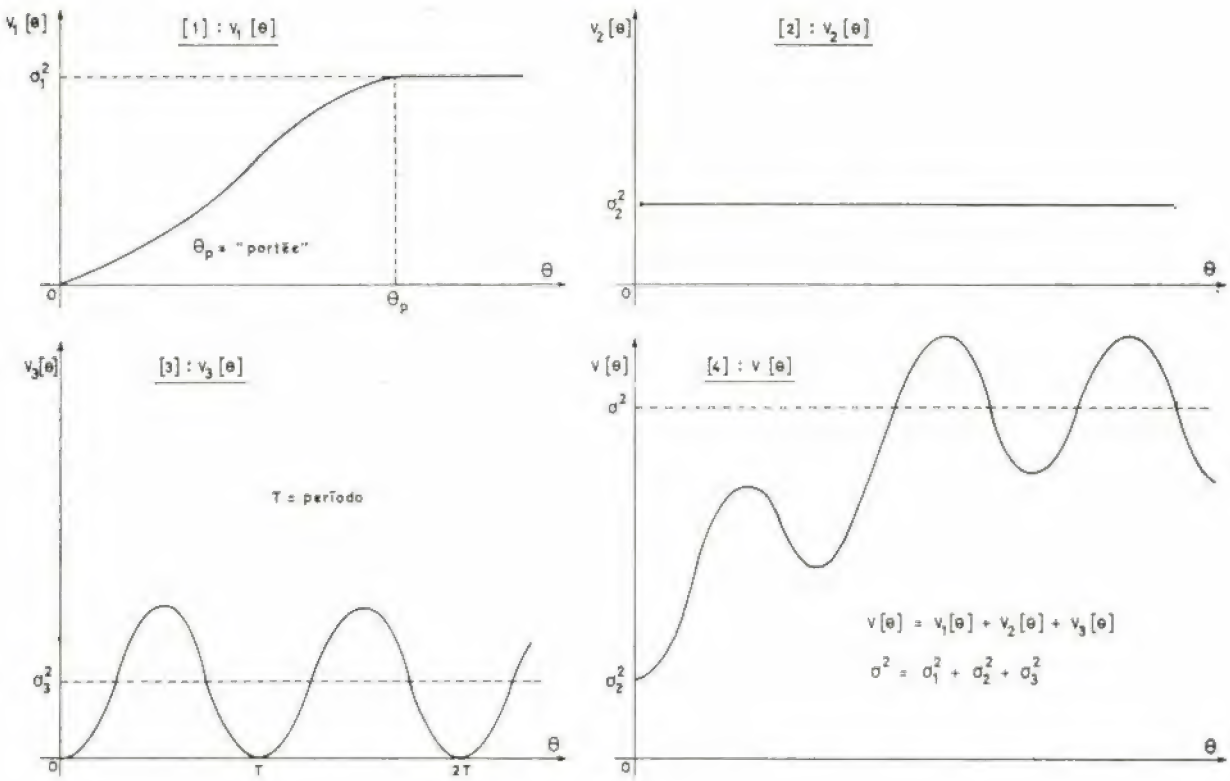


Fig. 2

(1) Vide Bibl. 11, pgs. 124 a 163 e Bibl. 22, pg. 28.
(2) De aplicação imediata nos lotes com zero dimensões.

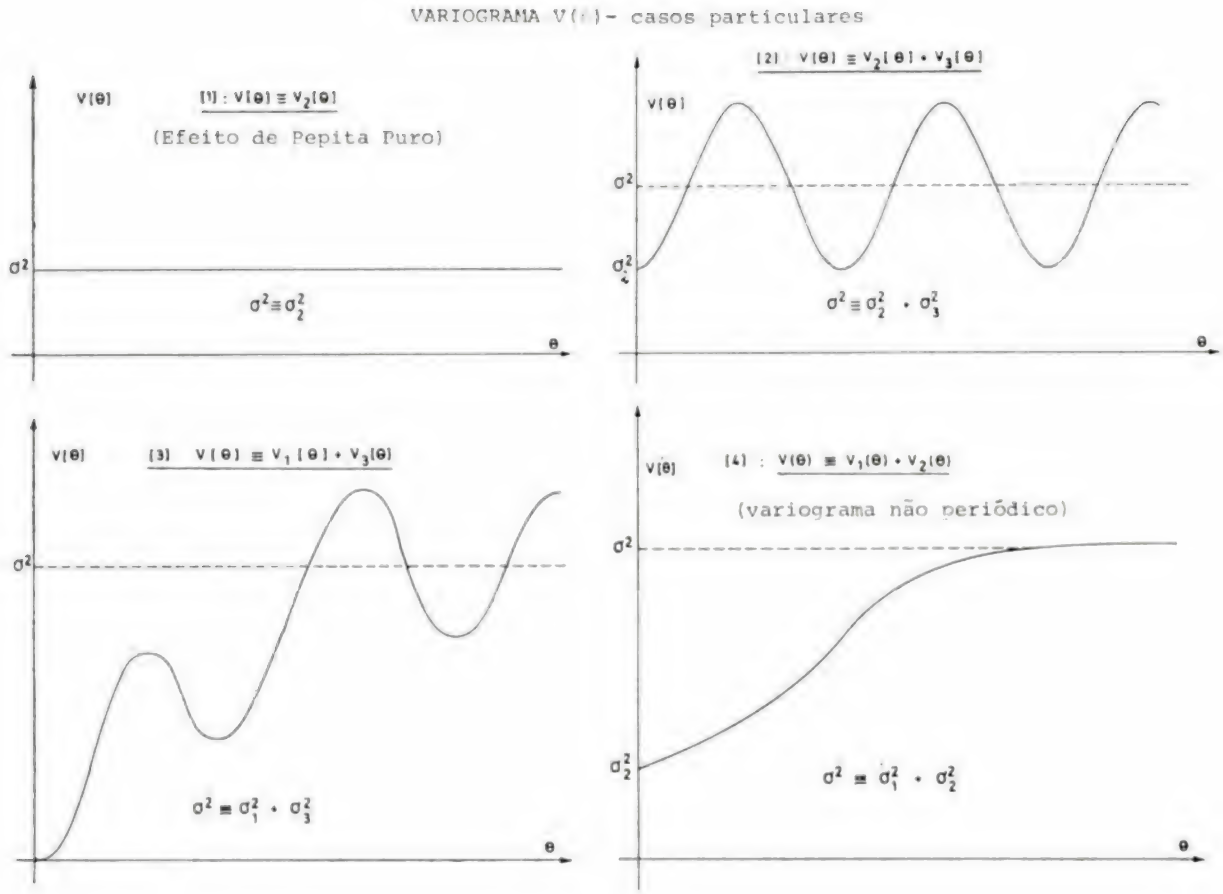


Fig. 3

(iii) — Variograma experimental $\hat{V}'(j\theta_1)$. É o estimador experimental bruto do variograma discreto;

(iv) — Variograma corrigido $\hat{V}(j\theta_1)$. É o variograma experimental após correcção dos erros de determinação;

(v) — Variograma interpolado $\overline{V}(\theta)$. É a relação funcional que é possível deduzir dos pontos conhecidos do variograma corrigido $\hat{V}(j\theta_1)$ e que constitui a representação do variograma integral, a partir da qual poderemos calcular os momentos do erro de amostragem de a(t).

2.3.3.1 — Estimação de $\hat{\sigma}_2^2 = \overline{V}_2(\theta)$

1. Cálculo de $\overline{V}_1(\theta) = \hat{\sigma}_2^2 = \hat{V}(\theta_1)$

2. O patamar do variograma θ_s

$$\forall j\theta_1 > \theta_s : \hat{V}(j\theta_1) - \hat{V}(\theta_1) > 0$$

2.3.3.2 — Estimação do variograma interpolado

Apenas se indica o caso em que o termo periódico é nulo [1].

(i) — Cálculo de $\hat{V}_1(j\theta_1) = \hat{V}(j\theta_1) - \hat{V}(\theta_1)$

(ii) — A partir dos pontos $\hat{V}_1(j\theta_1)$ assim definidos e de $V(\theta) = 0$, deduz-se a componente $\overline{V}_1(\theta)$ do variograma interpolado. É habitualmente possível adoptar uma das expressões seguintes:

$$\overline{V}_1(\theta) = V_1\,\theta$$

$$\overline{V}_1(\theta) = V_1\,\theta^{\lambda}$$

$$\overline{V}_1(\theta) = V_1\,\theta + V_1'\,\theta^2$$

cujos parâmetros podem ser determinados quer por método gráfico quer pelo método dos mínimos quadrados.

(iii) — Como $\overline{V}_2(\theta) = \hat{V}(\theta_1)$, teremos:

$$\overline{V}(\theta) = \overline{V}_1(\theta) + \overline{V}_2(\theta)$$

(1) No caso em que $V_3(\theta) \neq 0$, remete-se o leitor para a bibliografia (Bib. 11, pgs. 140-145). Também em Bib. 11, pgs. 145-161, se descreve a organização de uma experiência variográfica e um exemplo de análise completa dum variograma periódico.

2.4 — Caracterização da heterogeneidade local de distribuição

2.4.1 — Variograma das distribuições não ordenadas

São caracterizadas por $a_1(x) \equiv a_3(x) \equiv 0$,
donde $a(x) = a_L + a_2(x)$

e $$V(\theta) = V_2(\theta) = \sigma_2^2 = \frac{1}{D_L} \int_{D_L} [a_2(x)]^2 \, dx = \text{constante}$$

— × —

2.4.2 — Análise da noção de heterogeneidade duma distribuição não ordenada (1)

2.4.2.1 — Introdução e expressão matemática das diferentes formas de heterogeneidade

Considere-se um lote de material a granel (ex.: minério). Para comparar as diferentes formas de heterogeneidade teremos que nos fixar sobre a população dos fragmentos isolados e sobre as populações dos grupos de fragmentos. Seguidamente utiliza-se a técnica da análise da variância e caracteres aditivos (volumes ou desiquilíbrios relativos das massas do constituinte crítico).

Chega-se assim à expressão matemática das diferentes formas de heterogeneidade:

* heterogeneidade de constituição do Lote L:

$$H_C(L) = \sigma^2 (\Delta_{nj}) = \frac{1}{N_L} \sum_n \sum_j (\Delta_{nj} - \Delta_L)^2$$

É uma característica intrínseca do estado de fragementação do lote;

* heterogeneidade de constituição do Grupo G_n.

$$H_C(G_n) = \frac{1}{N_n} \sum (\Delta_{nj} - \Delta_n)^2$$

* heterogeneidade média de constituição dos grupos G_n.
É a média de $H_C(G_n)$ ponderada pelo seu efectivo N_n.

$$\overline{H}_C(G_n) = \frac{1}{N_L} \sum_n N_n H_C(G_n) = \frac{1}{N_L} \sum_n \sum_j (\Delta_{nj} - \Delta_n)^2$$

* heterogeneidade de distribuição de L entre os os grupos G_n

$$H_D(G_n) = \frac{1}{N_L} \sum_n N_n \Delta_n^2$$

em que:

$\Delta_n = (a_n - a_L) M_n / a_L \overline{M}_L$.

$\Delta_{nj} = (a_{nj} - a_L) M_{nj} / a_L \overline{M}_L$.

N_n — efectivo do grupo G_n.

N_L — efectivo do lote L.

$\overline{M}_L$ — massa do fragmento médio do lote.

a_L — teor do lote.

a_{nj} — teor do fragmento j do grupo G_n.

a_n — teor do grupo G_n.

M_n — massa do grupo G_n.

M_{nj} — massa do fragmento j do grupo G_n.

com a seguinte relação entre elas:

$$H_C(L) \equiv \overline{H}_C(G_n) + H_D(G_n)$$

2.4.2.2 — Homogeneidade natural de distribuição. Parâmetro de agrupamento

Diz-se que um lote apresenta uma distribuição naturalmente homógena quando há independência entre a personalidade de um fragmento e a posição do seu baricentro. A distribuição espacial dos fragmentos é uniforme ou, por outras palavras, os fragmentos estão distribuídos aleatoriamente pelos grupos G_n que se podem formar no seio do lote L.

Consequências: pode-se considerar o lote L como um dos lotes possíveis de efectivo N_L extraído ao acaso e um a um duma população L_∞ de efectivo infinito.

Seja Δ_i a heterogeneidade do fragmento F_i de L e σ^2 a variância de Δ_i nesta população de efectivo infinito.

A hipótese da homogeneidade natural é equivalente à colheita ao acaso e um a um dos fragmentos constituintes dos grupos G_n.

Sabe-se da estatística clássica que:

(i) — $$\sum_n \sum_j (\Delta_{nj} - \Delta_L)^2 / \sigma^2 = N_L H_C(L) / \sigma^2$$

se distribui em χ^2 com $N_L - 1$ graus de liberdade

(ii) — $$\sum_n \sum_j (\Delta_{nj} - \Delta_n)^2 / \sigma^2 = N_L \overline{H}_C(G_n) / \sigma^2$$

se distribui em χ^2 com $N_L - N$ graus de liberdade

(iii) — $$\sum_n N_n (\Delta_n - \Delta_L)^2 / \sigma^2 = N_L H_D(G_n) / \sigma^2$$

se distribui em χ^2 com $N - 1$ graus de liberdade.

Por outras palavras:

(i) — a variância total N_L/N_{L-1} $[H_C(L)]$,

(ii) — a variância residual N_L/N_{L-N} $[\overline{H}_C(G_n)]$,

(iii) — a variância entre estratos $N_L/_{N-1}[H_D(G_n)]$

(1) Dado este assunto já ter sido abundantemente tratado, limitar-nos-emos aos passos e conclusões essenciais, remetendo o leitor interessado para a bibliografia.

constituem três estimadores independentes e não enviezados da mesma variância σ^2.

Como $H_C(L)$ é um dado do problema, pode-se dizer que a homogeneidade natural de distribuição é caracterizada por:

$$m[\overline{H}_C(G_n)] = \frac{N_L - N}{N_L - 1} H_C(L) = \overline{H}_C(G_n)\text{máx} = \frac{\gamma}{1+\gamma} H_C(L)$$

$$m[H_D(G_n)] = \frac{N-1}{N_L - 1} H_C(L) = H_D(G_n)\text{min} = \frac{1}{1+\gamma} H_C(L)$$

O parâmetro de agrupamento γ, característico da escala de «découpe» (do suporte) será definido por

$$\gamma = (N_L - N) / (N-1)$$

2.4.2.3 — Caracterização do grau de segregação

No domínio natural, pode-se escrever:

$$H_C(L) \geqslant H_D(G_n) \geqslant \frac{1}{1+\gamma} H_C(L)$$

O parâmetro de segregação ξ característico do grau de heterogeneidade da distribuição é definido por:

$$H_D(G_n) = (1 + \gamma . \xi) H_C(L) / (1 + \gamma)$$

ξ pode tomar os seguintes valores:

$\xi = 1$ — a distribuição é rigorosamente heterogénea

$0 < \xi < 1$ — heterogeneidade natural da distribuição

$\xi = 0$ — homogeneidade natural

$-1/\gamma < \xi < 0$ — hiper-homogeneidade (artificial)

$\xi = -1/\gamma$ — homogeneidade rigorosa

Esta expressão contém efectivamente os três elementos responsáveis pela heterogeneidade de distribuição:

$H_C(L)$ — heterogeneidade de constituição

ξ — segregação

γ — dimensão dos grupos, ou escala de observação.

Os domínios de $H_D(G_n)$, $\overline{H}_C(G_n)$ e ξ estão esquematizados no quadro 2.

A influência da escala de observação está esquematizada no quadro 3.

2.4.2.4 — Expressão geral de H_D (Gn)

Explicitando a expressão do capítulo anterior em função das características do fragmento genérico F_i de L, obtém-se a seguinte expressão geral da heterogeneidade de distribuição do lote L que será utilizada na teoria de amostragem:

$$H_D(G_n) = (1+\gamma\ \xi)\ (N-1) \frac{N_L}{N_L - 1} \sum_i \left(\frac{a_i - a_L}{a_L} \quad \frac{M_i}{M_L} \right)^2$$

QUADRO 2

DOMÍNIOS DE H_D (Gn), $\overline{H}_C$ (Gn) e ξ

Heterogeneidade rigorosa de distribuição		Heterogeneidade natural de distribuição		Homogeneidade natural de distribuição		Hiper-homogeneidade (artificial) de distribuição		Homogeneidade rigorosa de distribuição
$H_C(L)$	>	$H_D(G_n)$	>	$\frac{1}{1+\gamma} H_C(L)$	>	$H_D(G_n)$	>	0
0	<	$\overline{H}_C(G_n)$	<	$\frac{\gamma}{1+\gamma} H_C(L)$	<	$\overline{H}_C(G_n)$	<	$H_C(L)$
1	>	ξ	>	0	>	ξ	>	$-1/\gamma$
Distribuição perfeitamente ordenada		Distribuição desordenada		Distribuição perfeitamente desordenada		Distribuições artificiais sem existência natural		

QUADRO 3

INFLUÊNCIA DA ESCALA DE OBSERVAÇÃO. VALORES LIMITES DE γ, $H_D(Gn)$ e $H_C(Gn)$ NO DOMINIO $0 \leqslant \xi < 1$

$\forall\ G_n \subset L;\ N_n = 1$		$1 < \overline{N}_n < N_L$ Domínio normal		$N_n = N_L$
N_L	$>$	N	$>$	1
0	$<$	γ	$<$	$+\infty$
$H_C(L)$	$>$	$H_D(G_n)$	$>$	0
0	$<$	$H_C(G_n)$	$<$	$H_C(L)$

3. PROCESSOS DE IMPLANTAÇÃO DE INCREMENTOS — MODELO DE INTEGRAÇÃO

3.0 — Introdução

O modelo de integracão resolve o problema da amostragem na perspectiva contínua, o que lhe dá uma grande generalidade.

Os resultados do estudo deste modelo aplicam-se indiferentemente a todos os tipos de teores e nomeadamente:

* teores em componentes químicos ou mineralógicos.
* teores de humidade.
* proporções das classes granulométricas.

Na sua essência o problema é rigorosamente o mesmo, qualquer que seja o número de dimensões do espaço do lote. Para fixar ideias estudou-se o caso importante do espaço com uma dimensão temporal que serve de modelo aos lotes em deslocamento (1).

3.1 — Leis usuais de integração

As leis mais usualmente utilizadas para designar, no seio do domínio D_L ocupado pelo lote L, os pontos sede dos incrementos pontuais são, como se sabe:

* integração sistemática com implantação aleatória.
* integração aleatória estratificada.
* integração aleatória.

Podemos, resumidamente, dizer o que se passa quanto às três leis:

(i) — Integração sistemática e aleatória estratificada.

a) Quando D_L/θ é um número inteiro qualquer, a densidade de probabilidade de implantação $g(x)$ é uniforme e igual a $1/\theta$ em todo o domínio D_L. O número Q de incrementos é constante e igual a D_L/θ.

b) Quando D_L/θ é um número não inteiro > 50, a densidade de probabilidade de implantação $g(x)$ é praticamente uniforme, embora não o seja de modo rigoroso. O número Q de incrementos é uma variável aleatória podendo tomar os valores Q' e Q'+1.

c) Quando D_L/θ é um pequeno número não inteiro, a densidade de probabilidade de implantação $g(x)$ já não é sequer praticamente uniforme. O número Q de incrementos é uma variável aleatória podendo tomar os valores Q' e Q'+1.

d) Só são correctas se e só se θ for um submúltiplo de D_L.

(ii) — Integração aleatória.

O número Q de incrementos é o parâmetro determinante da lei e é constante. Donde, a densidade de probabilidade de implantação $g(x)$ é uniforme em todo o domínio D_L e igual a Q/D_L. A integração aleatória é sempre correcta.

3.2 — Desenvolvimento do modelo de integração

3.2.1 — Distribuição da massa da Amostra M_E

(i) — No caso que nos ocupa, o variograma $\overline{V}_M(\theta)$ pode, na prática, ser reduzido, numa região limitada, a uma expressão linear da forma

$$\overline{V}(\theta) = V_{M1}\,\theta + V_{M2}$$

(ii) — Na hipótese de $Q \gg 50$, a massa M_E da amostra. E segue uma lei praticamente normal, cujos momentos são:

(1) A amostragem primária dos lotes a 1, 2 ou 3 dimensões espaciais deve ser resolvida com base nos trabalhos de Matheron.

* Integração sistemática:

$$m_1(M_E) = D_L\ D_C/\theta;\ \sigma_1^2(M_E) = D_L\left(\frac{V_{M_1}}{6} + \frac{V_{M_2}}{\theta}\right)$$

* Integração aleatória estratificada:

$$m_2(M_E) = M_L\ D_C/\theta;\ \sigma_2^2(M_E) = D_L\left(\frac{V_{M_1}}{3} + \frac{V_{M_2}}{\theta}\right)$$

* Integração aleatória:

$$m_3(M_E) = M_L\ D_C/D_L;\ \sigma_3^2(M_E) = Q\left(\frac{V_{M_1}\ D_L}{3} + V_{M_2}\right)$$

equivalente à da estatística clássica

$$\sigma_4^2(M_E) = Q\ \sigma^2(M_q)$$

3.2.2 — Distribuição de A_E — Correlação A_E, M_E

(i) — O que se disse para a distribuição da massa da amostra é válido para a distribuição da massa do constituinte crítico A.

(ii) — Quando as componentes periódicas $a_3(x)$ e $\mu_3(x)$ são nulas, é habitualmente possível admitir como hipótese de trabalho que os incrementos G_q e G_q, duma mesma amostra E têm características independentes. Pode pois escrever-se

$$\rho(A_E,\ M_E) \simeq \rho(A_q,\ M_q)\ (1)$$

3.2.3 — Distribuição de a_E

3.2.3.1 — Integração correcta. Caso geral

$$\text{Def.: } \forall\ x \in D_L;\ g(x) = g_o$$

$$\exists\ x \in D_L:\ \mu(x) \neq \mu_L$$
$$\rho(\mu(x),\ a(x)) \neq o$$
$$a(x) \neq a_L$$

(i) — Qualquer que seja a lei de integração, a variância relativa e o teor de a_E podem exprimir-se, em 1.ª aproximação, a partir das variâncias relativas de M_E e A_E e da correlação $\rho(A, M)$ calculáveis a partir duma experiência variográfica

$$U^2(a_E)_1 = U^2(a_E) + U^2(M_E) - 2\ \rho(A, M).\ U(A_E).\ U(M_E)$$

Esta primeira aproximação é sempre suficiente na prática(2).

(ii) — Quando a lei de integração é correcta, a integração é justa.

(iii) — Qualquer que seja a lei de integração, desde que assegure densidade uniforme de probabilidade, a integracão é justa em 2.ª aproximação unicamente nos 3 casos seguintes:

$$\mu(x) = cte$$
$$\rho(a(x),\ \mu(x)) = o$$
$$a(x) = cte$$

Em todos os outros casos é enviezada, podendo o viés ser calculado a partir de uma experiência variográfica.

A origem profunda deste viés reside na natureza da função teor. Um teor médio é uma média ponderada e não aritmética, excepto nos 3 casos apresentados.

3.2.3.2 — Integração correcta. Ponderação constante

$$\forall\ x \in D_L:\ g(x) = g_o$$
$$\mu(x) = \mu_o \Rightarrow \overline{V}_M(\theta) = \text{(distribuição homogénea)}$$

* média:

Quando a função de ponderação $\mu(x)$ e a densidade de probabilidade $g(x)$ são uniformes no domínio D_L, o teor a_E segue uma lei normal de média igual a a_L.

A integração é rigorosamente justa.

* Variância.

As expressões da variância apresentadas no caso geral continuam válidas(3). Basta notar que:

$$\overline{V}_M(\theta) = o$$
$$\overline{V}_A(\theta) = \mu^2_L\ V_a(\theta)$$

3.2.3.3 — Integração correcta. Correlação nula

$$\forall\ x\ D_L:\ g(x) = g_o$$
$$\rho(a(x),\ \mu(x)) = o$$

O teor a_E segue uma lei praticamente normal de média $m(a_E) = a_L$ e de variância relativa

$$U^2(a_E) = U^2(A_E) - U^2(M_E)$$

3.2.3.4 — Integração qualquer. Teor constante

$$\forall (x) \in D_L:\ a(x) = a_L$$
$$a_E \equiv a_L \Rightarrow m(a_E) = a_L$$
$$\sigma^2(a_E) = o$$

---

(1) $\rho(A_E,\ M_E) = Cov\ (A_E,\ M_E)/\sigma(A_E)\ .\ \sigma(M_E)$.

(2) Para explicitação em função das três leis de integração e para o cálculo da 2.ª aproximação, vide bibliografia —Bib. 11, pág. 213-217.

(3) Vide Bibliografia Bib. 11 —pág. 219.

3.2.3.5 — Integração incorrecta. Ponderação constante[1]

$$\forall x \in D_L \; ; \; g(x) \neq g_o$$
$$\mu(x) = \mu_L$$

Na integração sistemática e aleatória estratificada quando $\theta \rightarrow 0$ e Q' é grande (> 50) pode admitir-se que o desvio sistemático é desprezável, isto é, a integração é praticamente justa.

A integração aleatória é sempre justa.

A bibliografia (Bib. 11, pág. 229-241) apresenta numerosos exemplos de aplicação.

3.3 — Critérios de apreciação de uma amostragem na óptica do modelo de integração

Como já vimos a hierarquia das qualidades globais de uma amostragem é:

1.º exactidão.
2.º precisão.
3.º representatividade.

As condições práticas são:

(i) — Integração exacta.

Para que a integração seja exacta é necessário e suficiente que a matéria a amostrar tenha constituição rigorosamente homogénea:

$$\forall (x) \in D_L \Rightarrow a(x) = a_L$$

No caso geral, a integração nunca é exacta.

(ii) — Integração precisa.

É necessário:

a) que seja rigorosamente justa, o que implica que a densidade de probabilidade de implantação de incrementos seja uniforme:

$$\forall x \in D_L \rightarrow g(x) = g_o$$
$$\forall x \notin D_L \rightarrow g(x) = o$$

b) que seja satisfeita uma das duas condições suficientes seguintes:

b. 1) $\forall x \in D_L \rightarrow \mu(x) = \mu_L$
b. 1) $\forall x \in D_L \rightarrow \rho[a(x), \mu(x)] = o$

c) que seja fiel, isto é, que a lei de integração e o seu parâmetro determinante sejam escolhidos em função do nível de fidelidade fixado.

(iii) — Integração representativa.

É necessário:

a) que seja justa o que implica a correcção[2]

$$\forall x \in D_L \rightarrow g(x) = g_o$$
$$\forall x \notin D_L \rightarrow g(x) = o$$

b) que seja fiel (vide (ii) — c).

3.4 — Análise do erro total de integração

Tudo se passa como se o erro total de integração $EI_t = (a_E - a_L)/a_L$ fosse a soma de dois erros independentes:

* O erro de integração da função
$$a(x) = EI_a = (a_{E'} - a_L)/a_L$$
em que $a_{E'}$ é uma média aritmética.

* O erro da função ponderadora $\mu(x) = ED$. ED é definido de tal modo que

$$m(EI_t) = m(ED) + m(EI_a)$$
$$\sigma^2(EI_t) = \sigma^2(ED) + \sigma^2(EI_a) \; (3)$$

Por outro lado, o erro da função $a(x) - EI_a$ — pode ser considerado como a soma de três erros:

* Erro de integração do termo regionalizado $a_1(x)$
* » » » » » local $a_2(x)$
* » » » » » periódico $a_3(x)$

Os dois primeiros momentos destes erros, supostos independentes por hipótese, são:

$$m(EI_a) = m(EI_1) + m(EI_2) + m(EI_3)$$
$$\sigma^2(EI_a) = \sigma^2(EI_1) + \sigma^2(EI_2) + \sigma^2(EI_3)$$

O erro total de integração pode pois considerar-se como a soma de quatro erros independentes, o que permite somar os seus dois primeiros momentos.

3.5 — Erro de Ponderação ED

(i) — Média.

$$m(ED) = m(EI_t)$$

isto é, o viés do erro total de integração é inteiramente devido às flutuações de $\mu(x)$, só se anulando quando $\mu(x)$ = constante.

---

(1) Para mais detalhe vide Bib. 11, pág. 223-229.
(2) Esta condição é satisfeita para as três leis de integração, desde que D_L/θ seja inteiro ou maior que 50.
(3) $\sigma^2(EI_t) = U^2(a_E)$.
$\sigma^2(EI_a) = U^2(a_E')$.

Daí o interesse em regularizar o caudal de forma precisa, antes da amostragem.

(ii) — Variância.

Por definição $\sigma^2(ED) = U^2(a_E) - U^2(a_E')$.

Quer a média, quer a variância de ED podem ser determinadas através da realização duma experiência variográfica. Para os leitores interessados recomenda-se Bib. 11, pág. 265-275.

Na prática, os erros de caudal cometidos, quando este é regularizado, ponderal ou volumicamente de forma precisa, são aceitáveis.

3.6 — Erro de integração do termo regionalizado $a_1(x)$

3.6.1 — Definição

Chama-se termo regionalizado à componente $a_1(x)$ da função $a(x)$ que tem por variograma a componente $V_{a_1}(\theta)$ de $V_a(\theta)$. Pode-se determinar a componente $\overline{V}_{a_1}(\theta)$ do variograma interpolado a partir do resultado duma experiência variográfica.

Ao longo deste capítulo, consideram-se as seguintes hipóteses de base:

(i) — x pertence a um espaço com uma dimensão temporal;

(ii) — $\mu(x) = cte = \mu_L$;

(iii) — $a(x) \equiv a_L + a_1(x)$; $V_{a_1}(\theta) \equiv V_a(\theta)$;

(iv) — A densidade de probabilidade de implantação dos incrementos é uniforme.

$$\forall\, x \in D_L \rightarrow g(x) = g_o$$
$$\forall\, x \notin D_L \rightarrow g(x) = o$$

(v) — A componente regionalizada do variograma é linear, no domínio que nos interessa, admitindo por equação

$$\forall\, \theta \leq D_L : V_{a_1}(\theta) = V_{a_1}\,\theta$$

expressão, na qual, V_{a_1} é o parâmetro de regionalização linear. Esta hipótese é confirmada, com frequência, na prática.

3.6.2 — Média do erro EI_1

Devido a (ii) e (iv):

$$m(EI_1) = o \text{ ou } m(a_{EI}) = a_{L1}$$

3.6.3 — Variância do erro EI_1

Como $a_2(x) \equiv o$ e $V_{a_2} \equiv o$, teremos:

(i) — Integração sistemática

$$\sigma_1^2(EI_1) = \frac{V_{a_1}\, D_L}{6\, Q^2\, a_L^2} = \frac{V_{a_1}\, \theta^2}{6\, a_L^2\, D_L}$$

(ii) — Integração aleatória estratificada

$$\sigma_2^2(EI_1) = \frac{V_{a_1}\, D_L}{3\, Q^2\, a_L^2} = \frac{V_{a_1}\, \theta^2}{3\, a_L^2\, D_L}$$

(iii) — Integração aleatória

$$\sigma_3^2(EI_1) = \frac{V_{a_1}\, D_L}{3\, Q\, a_L^2}$$

Uma experiência variográfica permite determinar V_{a_1}.

Verifica-se pois que a integração sistemática é duas vezes mais fiel que a aleatória estratificada e 2 Q vezes mais fiel que a aleatória.

* Condições de anulação de $\sigma^2(EI_1)$.

Só se anula quando $V_{a_1} = o$, o que corresponde ao caso particular $a_1(x) = a_{L_1} =$ constante.

* Condições de minimização de $\sigma^2(EI_1)$.

a) Escolhendo a lei de integração mais fiel compatível com os outros dados do problema.

b) Escolhendo o mais pequeno valor de θ compatível com os outros dados do problema.

3.6.4 — Exemplo de aplicação

Tomemos o exemplo de uma experiência variográfica efectuada por P. Gy(1) e consideremos unicamente os dados pertinentes.

$D_L = 480$ min (um turno de 8 h);

$a_L = 1{,}58 \times 10^{-2}$ (g Pb/g sólidos);
$\forall\, \theta \,/\!/\, o < \theta \leq 140$ min : $V_{a_1}(\theta) =$

$= 0.078 \times 10^{-6}\, \theta$

a) Cálculo das variâncias.

Das expressões indicadas em 3.6.3 calculam-se imediatamente as variâncias:

$$\sigma_1^2 = 1.085 \times 10^{-7}\, \theta^2$$

$$\sigma_2^2 = 2.17 \times 10^{-7}\, \theta^2$$

$$\sigma_3^2 = 0.05/Q$$

(1) Vide bibliografia.

b) Cálculo do intervalo θ do comprimento do estrato ou do número de incrementos necessários para que a variância relativa seja $\leq \sigma_0^2$.

De 3.6.3 — tem-se imediatamente:

(i) — Integração sistemática.

$$\theta \leq \theta_0 = \sigma_0 \; a_L \; (6 \; D_L/V_{s_1})^{-2} = 3040 \; \sigma_0$$

(ii) — Integração aleatória estratificada.

$$\theta \leq \theta_0 = \sigma_0 \; a_L \; (3 \; D_L/V_{s_1})^{-2} = 2150 \; \sigma_0$$

(iii) — Integração aleatória.

$$Q \geqslant Q_0 = V_{s_1} \; D_L/3 \; \sigma_0^2 \; a_L^2 = 0.05 \; \sigma_0^2$$

Assim, supondo que se desejava fixar um intervalo de confiança de ± 1 % (ao nível 2σ) ter-se-á que tomar para $\sigma_0 = 5 \times 10^{-3}$, o que permite calcular:

i) 15.2 min ou $Q > 32$;

ii) 10.75 min ou $Q > 45$;

iii) $Q > 2000$.

3.7 — Erro de integração do termo local $a_2(X)$

3.7.1 — Definição

Chama-se termo local à componente $a_2(x)$ de $a(x)$ que admite por variograma a componente $V_{s_2}(\theta)$ de $V_s(\theta)$. Pode-se determinar a componente $\overline{V}_{s_2}(\theta) = V_{s_2}$ do variograma interpolado à custa dos resultados de uma experiência variográfica.

Ao longo deste capítulo fazem-se as seguintes hipóteses:

i) x pertence a um espaço com uma dimensão temporal;

ii) $\mu(x) = \mu_L = \text{cte}$;

iii) $a(x) \equiv a_L + a_2(x)$;

donde: $V_a(\theta) \equiv V_{s_2}(\theta) \equiv V_{s_2}$, expressão na qual V_{s_2} é o parâmetro de desordem local.

3.7.2 — Média do erro EI_2

Como $\mu(x) = \mu_L$ e como as três leis da integração asseguram uma densidade uniforme de implantação dos incrementos

$$m(EI_2) = o \quad \text{ou} \quad m(a_{E_2}) = a_{L_2}$$

desde que D_L/θ seja inteiro ou maior que 50.

3.7.3 — Variância do erro EI_2

Pela aplicação das leis de 3.2.3.2, tem-se

$$\sigma_1^2(EI_2) = \sigma_2^2(EI_2) = \sigma_3^2(EI_2) = V_{s_2} \; \theta/D_L \; a_L^2 = V_{s_2}/Q \; a_L^2$$

Uma experiência variográfica permite determinar V_{s_2}.

* Condições de anulação.
  Só se anula quando $V_{s_2} = 0 \, (a_2(x) = a_{L_2})$ (1)
* Condições de minimização.

Escolhendo o menor valor de θ compatível com os outros dados do problema.

3.7.4 — Exemplo de aplicação

Retomemos o exemplo referido em 3.6.4.

$D_L = 480$ min

$a_L = 1.58 \times 10^{-2}$ (g P_b/g sólidos)

$\hat{V}_{s_2} = 10^{-6}$

$\hat{V}_{s_2} = V_{s_2} - \sigma_e^{2\,(2)} = 10^{-6} - 0.25 \times 10^{-6} = 0.75 \times 10^{-6}$

(i) — Cálculo da variância.

De 3.7.3 tem-se

$$\sigma^2(EI_2) = 6.25 \times 10^{-6} \; \theta = 3000 \times 10^{-5} / Q$$

(ii) — Se se fixar uma tolerância relativa

$\pm 2 \, \sigma_0 = \pm 2$ % ($\sigma^2 = 10^{-4}$), ter se-á:

$$\theta \leqslant \theta_0 = \sigma_0^2 \; a_L^2 \; D_L/V_{s_2} = 16 \times 10^4 \; \sigma_0^2 = 16 \text{ min}$$

$$Q \geqslant Q_0 = V_{s_2}/\sigma_0^2 a_L^2 = 3000 \times 10^{-6} / \sigma_0 = 30$$

Verifica-se facilmente que $Q_0 \times \theta_0 = D_L$.

3.8 — Erro de integração do termo periódico $a_3(X)$

Em «Théorie et Pratique de l'Échantillonnage des Matières Morcelées» de P. Gy, trata-se desenvolvidamente o tema na hipótese da amplitude e frequência de $a_3(X)$ serem constantes.

Como nem sempre isso sucede e como é por vezes muito difícil calcular o período do fenómeno sem recorrer a experiências variográficas longas e onerosas, apresentam-se as conclusões e recomendações tendentes a diminuir o valor da variância do erro da integração do termo periódico.

---

(1) Veremos no âmbito do modelo probabilista, quando se desce à escala do fragmento, as condições em que esta variância é susceptível de se anular.

(2) Variância dos erros de preparação e análise.

(i) — Quando é impossível definir com precisão o período T do fenómeno periódico e quando o risco representado pelo valor máximo da variância

$$\frac{1}{2}\ (a_3/a_L)^2$$

é inaceitável, deve evitar-se a integração sistemática. Escolher-se-á uma amostragem aleatória estratificada cujo valor máximo da variância é Q vezes menor.

A integração aleatória nunca é melhor que a aleatória estratificada.

(ii) — Quando é possível definir com precisão o período T, pode usar-se a integração sistemática desde que θ seja um submúltiplo de T ou um múltiplo ímpar de T/2. Também a amostragem aleatória estratificada conduz, em média, a uma variância menor. A integração aleatória nunca é melhor que a aleatória estratificada.

(iii) — Quando $\frac{1}{2}\ (a_3/a_L)^2$ é aceitável, pode usar-se a integração sistemática sem perigo.

(iv) — Há sempre interesse em procurar e tentar eliminar, se possível, as causas das variações periódicas da qualidade da matéria a amostrar, devido aos riscos inerentes à sua amostragem.

(v) — É conveniente não esquecer que se integra simultaneamente os termos $a_1(X)$ e $a_3(X)$. O que importa é minimizar a soma $\sigma^2(EI_1)+\sigma^2(EI_3)$ utilizando, segundo os casos, a integração sistemática ou a aleatória estratificada. A integração aleatória conduz sempre a maior variância total.

(vi) — Na dúvida, ou na falta de elementos precisos, a integração aleatória estratificada, embora não seja sempre a mais fiel, constitui sempre a melhor solução de compromisso conduzindo a amostragens nem demasiadamente imprecisas nem demasiado caras.

4. PROCESSOS DE IMPLANTAÇÃO DE INCREMENTOS

O MODELO PROBABILISTA

4.0 — Introdução

O modelo probabilista resolve o problema da amostragem na perspectiva descontínua.

Os resultados aplicam-se indiferentemente a todos os tipos de teores e nomeadamente:

* teores em componentes químicos ou mineralógicos;
* teores de humidade;
* proporções das classes granulométricas.

Resolve os problemas nos quais intervêm quer os fragmentos isolados, quer os pequenos grupos de fragmentos que constituem os incrementos. São eles: a análise do erro de integração do termo local $a_2(x)$, a «découpe» e a toma.

4.1 — Desenvolvimento do modelo probabilista

4.1.1 — Definição

Distinguiremos dois sub-modelos:

(i) — Modelo Probabilista Simples: considera o lote L como o conjunto dos N_L fragmentos F_i que o compõem. Cada fragmento participa indvidual e independentemente na amostragem com probabilidade P_i, bem definida, de ser colhido.

(ii) — Modelo Probabilista Composto: considera o lote L como o conjunto de N grupos G_n de fragmentos, cada um dos quais suposto indivisível e participando na amostragem com probabilidade P_n, bem definida, de ser colhido.

4.1.2 — Probabilidade de colheita de um fragmento

Os dois acontecimentos:

* presença de F_i na amostra modelo D_E obtida pela reunião dos incrementos modelo;
* toma de F_i, quando F_i está em D_E.

são independentes. Donde, pelo teorema das probabilidades compostas: $P_i = P'_i \times P''_i$ em que:

P_i — probabilidade de F_i pertencer à amostra real;

P'_i — probabilidade de F_i pertencer à amostra modelo (probabilidade de «découpe»);

P''_i — probabilidade de F_i pertencer à amostra real, se pertencer já à amostra modelo (probabilidade de «toma»).

(i) — probabilidade de «découpe» P'_i.

Os dois acontecimentos:

* presença de F_i em dx;
* selecção de x para sede dum incremento;

são independentes.

Donde:

$$P'_i = \int_{D_L} f_i(x) \cdot g(x)\ dx$$

$f_i(x)$ — densidade de probabilidade de presença de F_i em x — caracteriza a distribuicão espacial de F_i e é habitualmente um dado do problema;

$g(x)$ — densidade de probabilidade de que x seja escolhido para sede dum incremento pontual — caracteriza a distribuição espacial dos incrementos(1).

A «découpe» cai no âmbito do modelo probabilista composto.

(ii) — Toma.

Pode-se admitir que F_i é submetido individual e independentemente à operação de toma. Esta será pois estudada no âmbito do modelo probabilista simples(2).

4.1.3 — Modelo probabilista simples(3)

As características N_K, M_K, A_K e a_K da amostra E_K são variáveis aleatórias. É objectivo dos capítulos seguintes estudar as suas distribuições, i.é., definir as suas leis de probabilidade e estimar os seus primeiros momentos. Para isso, suporemos que se repete independentemente a mesma amostragem um certo n.º K de vezes, após reincorporação.

Seja:

L_K — população dos fragmentos formada pela reunião das K amostras;

K_i — efectivo de repetição do fragmento F_i em L_K;

P_i — a probabilidade de colheita de F_i.

4.1.4 — Distribuição de K_i em L_K

K_i segue a lei binomial de momentos

$$m(K_i) = K\ P_i \quad \text{e} \quad \sigma^2(K_i) = K\ P_i(1-P_i)$$

Quando $K \to \infty$:

a) P_i não é vizinho nem de 0, nem de 1 — a lei binomial tende para uma lei normal;

b) $P_i \ll 1$ — a distribuição de K_i tende para log-normal(4);

c) $1-P_i \ll 1$ — a distribuição de $K'_i = K - K_i$ tende para uma distribuição log-normal.

4.1.5 — Distribuição do efectivo N_K de E_K

$$m(N_K) = \sum_i P_i \ ; \ \sigma^2(N_K) = \sum_i P_i(1-P_i)$$

4.1.6 — Distribuição da massa M_K de E_K

$$m(M_K) = \sum_i M_i\ P_i \ ; \ \sigma^2(M_K) = \sum_i M_i^2 P_i(1-P_i)$$

4.1.7 — Distribuição de A_K em E_K

$$m(A_K) = \sum_i A_i\ P_i = \sum_i a_i\ M_i\ P_i$$

$$\sigma^2(A_K) = \sum_i A_i^2 P_i(1-P_i) = \sum_i a_i^2 M_i^2\ (1-P_i)\ P_i$$

4.1.8 — Distribuição do teor a_K de E_K

O teor a_K é igual a

$$a_K = \frac{A_k}{M_k} = \frac{\sum_j A_{kj}}{\sum_j M_{kj}} = \frac{\sum_j a_{kj}\ M_{kj}}{\sum_j M_{kj}}$$

Conhecem-se as leis e os momentos de A_K e de M_K. O seu quociente, no caso geral, segue uma lei complexa. Tentemos particularizar:

(i) — P_i próximo de 0,5:

A_K e M_K seguem leis praticamente normais. O seu quociente segue uma lei que tende para uma lei normal quando o coeficiente de variação(5) $U(M_K)$ tende para zero ($M_K \to$ cte).

(ii) — P_i é vizinho de 0 ou de 1:

A_K e M_K seguem leis normais, i.é., log A_K e log M_K seguem leis normais.

Como log a_K = log A_K − log M_K, pode-se admitir que a_K segue também uma lei log-normal.

---

(1) «Découpe» correcta: P'_i=constante.
(2) Toma correcta: $P'_i{}' = 1$.
(3) Vidé Bib. 11 (pgs. 337 a 365).
(4) Vide Matheron — Bib. 15.
(5) Desvio padrão relativo.

Com a ajuda de variáveis auxiliares aditivas similares às que se utilizaram na análise de heterogeneidade, chega-se às seguintes conclusões(1):

a) — Em primeira aproximação, os momentos do teor a_k da amostra E_k são:

$$m(a_k) = \frac{\sum_i a_i M_i P_i}{\sum_i M_i P_i} = \frac{m(A_k)}{m(M_k)} = a_o$$

$$\sigma^2(a_k) = \frac{\sum_i (a_i - a_o)^2 M_i^2 P_i (1-P_i)}{\left(\sum_i M_i P_i\right)^2}$$

Na prática, esta primeira aproximação é sempre suficiente.

b) — Em segunda aproximação haverá que adicionar algebricamente os seguintes termos correctivos:

$$m(a_K) \rightarrow - \frac{\sum_i (a_i - a_o) M_i^2 P_i (1-P_i)}{\left(\sum_i M_i P_i\right)^2}$$

$$\sigma^2(a_K) \rightarrow - \frac{2 \sum_i (a_i - a_o)^2 M_i^3 P_i (1-P_i)(1-2P_i)}{\left(\sum_i M_i P_i\right)^3}$$

Verifica-se que os termos correctivos são sempre de ordem mais elevada em M_i/M_o(2) que é sempre um infinitamente pequeno, pelo que são desprezáveis.

4.1.9 — Casos particulares

4.1.9.1 — Amostragem correcta

Por definição: $\forall\ F_i \in L : P_i = P$.

Donde, a partir de 4.1.8 teremos, em 1.ª aproximação:

$$m(a_K) = a_L$$

$$\sigma^2(a_K) = \frac{1-P}{P} \frac{\sum_i (a_i - a_L)^2 M_i^2}{M_L^2}$$

$$U^2(a_K) = \sigma^2(a_K)/a_L^2$$

Nota-se que, quando $P_i = P$, em 1.ª aproximação:

(i) — A amostragem não é enviezada;

(ii) — A variância relativa $U^2(a_K)$ é igual à variância de erro fundamental(3):

$$\sigma^2(EF) = \frac{1-\tau}{\tau} \frac{\sum_i (a_i - a_L)^2 M_i^2}{a_L^2 M_L^2}$$

com a única diferença de que na 1.ª, intervém as probabilidades, e na segunda as taxas de amostragem τ.

Vê-se pois que o modelo probabilista desenvolvido neste capítulo é apenas uma generalização do modelo equiprovável já desenvolvido por P. Gy em trabalhos anteriores.

4.1.9.2 — Fragmentos com massas iguais

(i) — amostragem incorrecta ($\forall\ F_i \in L\ ;\ P_i \neq P$)

$$m(a_K)_1 = \sum_i a_i P \Big/ \sum_i P_i \neq a_L;$$

(ii) — amostragem correcta ($\forall\ F_i \in L;\ P_i = P$) $m(a_K) = a_L$ — rigorosamente justa.

4.1.9.3 — Fragmentos com teores iguais

$$m(a_K) = a_L$$
$$\sigma^2(a_K) = 0$$

4.1.9.4 — Massas e teores diferentes mas com correlação nula

(i) — Se a amostragem é incorrecta, é enviezada;

(ii) — Se é correcta é rigorosamente justa.

4.1.10 — Exploração prática dos resultados

a) — Nos parágrafos precedentes considerámos conhecidas as distribuições de M_i, a_i e de P_i de cada um dos N_L fragmentos F_i que constituem o lote L a amostrar.

Na prática é geralmente impossível numerar todos os fragmentos dum lote e muito menos conhecer a sua massa e teor

---

(1) Vide Bib. 11.

(2) $M_o = m(M_k) = \Sigma\ M_i\ P_i$; M_i/M_o — quociente entre a massa do fragmento genérico F_i e a esperança da massa da amostra.

(3) Vide Bib. 7 — Cap. 4.1.

individuais, ou ainda atrbuir a cada um deles uma probabilidde P_i de colheita (exceptua-se os casos seguintes: $\forall F_i \in L$; $P_i = P$; $P_i = 1$; $P_i = 0$).

Assim, na prática rodeia-se esta dificuldade à custa da seguinte aproximação: divide-se o lote em classes granulodensitárias $L_{\alpha\beta}$ e admite-se que cada fragmento F_i possui as características do fragmento médio $F_{L\alpha\beta}$ da classe homogénea $L_{\alpha\beta}$ a que pertence. As características do fragmento médio são fáceis de determinar por pesagem e análise química duma amostra aleatória de p fragmentos.

Também se admite que todos os fragmentos de $L_{\alpha\beta}$ são amostrados com a mesma probabilidade de toma $P_{\alpha\beta}$ (1).

b) — Considerando que este assunto já foi tratado com todo o detalhe em publicações anteriores de P. Gy, limitar-nos-emos a apresentar os resultados e unicamente no caso da toma ser correcta e em 1.ª aproximação:

(i) — $P' \ll 1$ (Processo de implantação de incrementos):

$$m(a_K) = \sum_{\alpha} a_{L\alpha} M_{L\alpha} / M_L = a_L$$

$$\sigma^2(a_K) = \left[\sum_{\alpha} a_{L\alpha} - a_L)^2 \overline{M}_{L\alpha} M_{L\alpha} / M_L \right] \Big/ P' M_L$$

(ii) — $P' \simeq 0.5$ (Processo de Partilha)

$$m(a_K) = a_L$$

$$\sigma^2(a_K) = \left[\sum_{\alpha} (a_{L\alpha} - a_L)^2 \overline{M}_{L\alpha} / M_L \right] \Big/ M_L$$

c) — A estimação experimental da massa $\overline{M}_{L\alpha}$ do fragmento médio $\overline{F}_{L\alpha}$ da classe L_α pode fazer-se por:

(i) — pesagem de $M_{L\alpha}$ e contagem de $N_{L\alpha}$;

(ii) — pesagem e numeração de uma amostra representativa de $L\alpha$;

(iii) — estimação indirecta:

$$\overline{M}_{L\alpha} = f_\alpha \overline{\mu}_\alpha d_\alpha^3$$

em que:

f_α — factor de forma de L_α ($f_\alpha \simeq f \simeq 0.5$)

$\overline{\mu}_\alpha$ — massa volúmica média dos fragmentos de L_α (ou por medida ou por estimação em face do conhecimento da composição mineralógica de L)

d_α — cúmulo superior de $\overline{F}_{L\alpha}$

$$d_\alpha^3 = \left(d_{\alpha_1}^3 + d_{\alpha_2}^3 \right) \Big/ 2 \quad (2).$$

4.1.11 — Modelo Probabilista composto

Considera-se o lote L como o conjunto dos N grupos G_n pelos quais estão repartidos os N_L fragmentos.

Estes N grupos G_n podem ser, por exemplo, todos os incrementos — modelo possíveis.

Pode admitir-se, para as leis usuais de integração e quando o variograma da distribuição dos N grupos é «plat», que cada grupo G_n é submetido individual e independentemente à operação de «découpe», com uma probabilidade p'_n:

$$\forall G_n \subset L ; P'_n = P'$$

Considerando que a probabilidade de colheita dos grupos é uniforme e que a «découpe» é correcta, obtêm-se os valores dos momentos e das características da amostra E indicados nos quadros 4 e 5.

Note-se que:

a) — A variância $\sigma^2(M_E)$ não é nula porque o número de incrementos Q_E é uma variável aleatória.

b) — Introduzindo $Q = m(Q_E)$ — número médio de incrementos, obtém-se, para $M_n = M_L/N$

$$\sigma^2(a_E) = \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N} \sum_n (a_n - a_L)^2 = \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right) \sigma^2(a_n)$$

que é a expressão da estatística clássica referida no modelo de integração, o que significa que os dois modelos são similares na sua charneira: o variograma «plat».

4.2 — Critérios de apreciação de uma amostragem na óptica probabilista

Este parágrafo é uma réplica do parágrafo 3.3. As condições práticas são:

(i) — Para que uma operação probabilista seja

---

(1) $P_{\alpha\beta}$ é igual à esperança da taxa numérica real $\tau_{\alpha\beta}$ da classe granulo-densitária $L_{\alpha\beta}$

(2) d_{α_1} e d_{α_2} são os limites superior e inferior da classe granulométrica L_α

QUADRO 4

MODELO PROBABILISTA COMPOSTO. CARACTERÍSTICAS DA AMOSTRA E «DÉCOUPE» CORRECTA ($\forall\ G_n \subset L\ ;\ P'_n = P'$) — MASSAS M_n QUAISQUER

Grandeza x_E	Média $m(x_E)$	Variância $\sigma^2(x_E)$	Variância relativa $U^2(x_E) = \sigma^2(x_E) / m^2(x_E)$
Efectivo Q_E	$P'N$	$P'(1-P')\ N$	$(1-P') / P'N$
Massa M_E	$P'M_L$	$P'(1-P') \sum_n M_n^2$	$\frac{1-P'}{P'} \frac{\sum_n M_n^2}{M_L^2}$
Massa A_E	$P'a_L M_L$	$P'(1-P') \sum_n a_n^2 M_n^2$	$\frac{1-P'}{P'} \frac{\sum_n a_n^2 M_n^2}{a_L^2 M_L^2}$
Teor a_E Termo principal	a_L	$\frac{1-P'}{P'} \frac{\sum_n (a_n - a_L)^2 M_n^2}{M_L^2}$	$\frac{1-P'}{P'} \frac{\sum_n (a_n - a_L)^2 M_n^2}{a_L^2 M_L^2}$
Teor a_E Termo correctivo	$\frac{1-P'}{P'} \frac{\sum_n (a_n - a_L) M_n^2}{M_L^2}$	$\frac{2(1-P')(1-2P')}{P'^2} \frac{\sum_n (a_n - a_L)^2 M_n^3}{M_L^3}$	$\frac{2(1-P')(1-2P')}{P'^2} \frac{\sum_n (a_n - a_L)^2 M_n^3}{a_L^2 M_L^3}$

QUADRO 5

MODELO PROBABILISTA COMPOSTO — CARACTERISTICAS DA AMOSTRA E DÉCOUPE CORRECTA — MASSAS IGUAIS ($M_n = M_L/N$)

Grandeza x_E	Média $m(x_E)$	Variância $\sigma^2(x_E)$	Variância relativa $U^2(x_E) = \sigma^2(x_E) / m^2(x_E)$
Efectivo Q_E	$P'N$	$P'(1-P')\,N$	$(1-P') / P'N$
Massa M_E	$P'M_L$	$P'(1-P')\,M_L^2/N$	$\frac{1-P'}{NP'}$
Massa A_E	$P'\,a_L\,M_L$	$P'(1-P')\,M_L^2 \sum_n a_n^2/N^2$	$\frac{1-P'}{P'}\,\frac{\sum_n a_n^2}{N^2\,a_L^2}$
Teor a_E Termo principal	a_L	$\frac{1-P'}{P'}\,\frac{\sum_n (a_n-a_L)^2}{N^2}$	$\frac{1-P'}{P'}\,\frac{\sum_n (a_n-a_L)^2}{N^2\,a_L^2}$
Teor a_E Termo correctivo	0	$-\frac{2(1-P')\,(1-2P')}{P'^2}\,\frac{\sum_n (a_n-a_L)^2}{N^3}$	$-\frac{2(1-P')\,(1-2P')}{P'^2}\,\frac{\sum_n (a_n-a_L)^2}{N^3\,a_L^2}$

exacta é necessário e suficiente que a matéria a amostrar seja dotada de homogeneidade de constituição o que só é possível idealmente;

(ii) — Para que seja *precisa* (sem ser exacta), é necessário:

* que seja rigorosamente justa o que implica(1)

— que seja *correcta*

$\forall F_i \in L ; P_i = P$
$\forall F_i \notin L ; P_i = 0$

— que seja satisfeita uma das seguintes condições suficientes:

* $\forall F_i \in L ; M_i = M_L/N_L$
* $\rho(a_i, M_i) = 0$

* que seja fiel;

(iii) — Para que seja *representativa* (sem ser exacta nem precisa) é necessário:

* que seja aproximadamente justa, i.é., *correcta;*
* que seja fiel.

4.3 — Erro fundamental e erro de segregação

4.3.1 — Introdução

No âmbito do modelo de integração a desordem local apenas intervem na sua forma global através o termo V_{a_2} do variograma $V_a(\theta)$.

Este termo, de conteúdo probabilista, vai servir de charneira entre o modelo de integração regularizado e o modelo probabilista composto, em cuja óptica nos colocámos.

Como, na prática, os incrementos nunca são monofragmentários, é lógico considerar os grupos G_n de fragmentos disjuntos e complementares em L, no seio dos quais cada fragmento F_{nj} está indissoluvelmente ligado a uma estrutura fixa — estamos no âmbito do modelo probabilista composto.

A integração consistirá em seleccionar, segundo uma lei, um certo número Q destes grupos indissociáveis ($P = Q/N$).

Ver-se-á ao longo deste capítulo, como aparece a integração na perspectiva descontínua da matéria.

4.3.2 — Momentos do erro de integração EI_2 na perspectiva probabilista

a) — Admita-se que $a(x) = a_L + a_2(x)$, função do tipo da que se observa na retoma dum parque de homogeneização.

A ausência de regionalização implica que as populações dos teores $a(x_n)$ e a_n são normais ou que não existe correlacão entre o teor a_n e n. Neste caso as três leis de integração são equivalentes entre si e a uma tiragem ao acaso duma população qualquer.

Podem pois aplicar-se os resultados do Modelo Probabilista à toma de Q grupos da população-mãe dos N grupos constitutivos de L.

O teor a_E é uma variável aleatória cujos momentos foram estudados no Capítulo 4.1. Os momentos de EI_2 não são mais do que os momentos centrados relativos de a_E.

Na prática, para as três leis usuais de integração e sempre que $D_L/\theta = Q$ inteiro teremos:

1. modelo de integração (vide Cap. 3).

$$m(EI_2) = 0$$
$$\sigma^2(EI_2) = V_{a_2}/Q a_L^2 = \sigma^2(a_n)/Q\ a_L^2$$

2. Modelo probabilista.

$$m(EI_2) = 0$$

$$\sigma^2(EI_2) = \frac{1-P}{P} \sum_n (a_n - a_L)^2\ M_n^2/a_L^2\ M_L^2$$

A 1.ª aproximação é suficiente (2).

Note-se que quando $P \ll 1$, $M_n = M_L/N$ e $P = Q/N$, teremos $\sigma^2(EI_2) = \sigma^2(a_n)/Q\ a_L^2$ idêntica à do modelo de integração.

b) — Explicitação da expressão da variância de EI_2.

A variância de EI_2 é igual à variância de ΔE, heterogeneidade da amostra E.

$$\text{Como } \sigma^2(\Delta E) = \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right)\frac{N}{N-1}\ \sigma^2(\Delta_n) \qquad (3)$$

$$= \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right)\frac{N}{N-1} \sum_n \Delta_n^2/N$$

$$\text{e por outro lado } H_D(G_n) = \sum_n N_n\ \Delta_n^2/N_L$$

---

(1) A justiça rigorosa pode ser obtida quando as probabilidades P_i não são uniformes mas são independentes da personalidade dos fragmentos: $\rho(A_i, P_i) = 0$ e $\rho(M_i, P_i) = 0$.

(2) A 2.ª aproximação está indicada no quadro 4.

(3) Da estatística clássica.

Se $\forall\ G_n \subset L \rightarrow N_n = N_L/N$

teremos $H_D(G_n) = \sum_n \Delta_n^2/N = \sigma^2(\Delta_n)$

o que tomando em consideração o que se disse em heterogeneidade local conduz a

$$H_D(G_n) = (1+\gamma\xi)\ (N-1)\ \frac{N_L}{N_L-1} \sum_i \left[\frac{a_i-a_L}{a_L}\ \frac{M_i}{M_L}\right]^2$$

em que γ e ξ têm os significados habituais.

Pode pois *concluir-se:*

Considerando que $Q/N=P$ e que $N_L \gg 1$

$$\sigma^2(EI_2) = \frac{1-P}{P}\ (1+\gamma\xi) \sum_i \left[\frac{a_i-a_L}{a_L}\ \frac{M_i}{M_L}\right]^2$$

em que:

* $\frac{1-P}{P} = (1-\tau)/\tau = N/Q-1$

  Factor de amostragem que apenas depende de P (suposto uniforme) ou de τ. A dimensão e o número absoluto dos incrementos não intervêm.

* $1+\gamma\xi$ Factor de segregação e de agrupamento:
  $\xi=0$ – segregação nula;
  $\gamma=0$ – quando o efectivo de G_n é 1.

* $\sum_i \left[\frac{a_i-a_L}{a_L}\ \frac{M_i}{M_L}\right]^2$ — Factor de composição da matéria a amostrar. Está ligado à heterogeneidade de constituição e é igual a $H_C\ (L)/N_L^2$.

Como se vê, $\sigma^2(EI_2)$, na prática, nunca se anula, mas pode diminuir-se quando:

(i) — Se colhe uma amostra o maior possível;
(ii) — se homogeniza o lote antes da amostragem;
(iii) — se efectua um grande número de pequenos incrementos em vez de um menor número de grandes incrementos;
(iv) — fragmentando, na medida do possível, o lote a amostrar.

4.3.3 — Erro Fundamental

4.3.3.1 — Definição

Designa-se por *Erro Fundamental* o valor mínimo de EI_2 quando a amostragem é correcta e $\gamma\xi=0$.

EI_2 reduz-se a EF em dois casos.

(i) — $\xi=0$ — Distribuição naturalmente homogénea. Os incrementos podem ter qualquer dimensão-amostragem quase-equiprovável;
(ii) — $\gamma=0$ — incrementos de fragmentos isolados. A sua distribuição pode ser qualquer-amostragem equiprovável.

Estas condições correspondem às do modelo probabilista já estudado.

4.3.3.2 — Momentos de EF

1.ª aproximação:

$$M(EF)_1 = 0$$

$$\sigma^2(EF)_1 = \frac{1-P}{P} \sum_i \left[\frac{a_i-a_L}{a_L}\ \frac{M_i}{M}\right]^2$$

2.ª aproximação:

$$M(EF)_2 = M(EF)_1 - \frac{1-P}{P} \sum_i \left[\frac{a_i-a_L}{a_L}\right]\left[\frac{M_i}{M}\right]^2$$

$$\sigma^2(EF)_2 = \sigma^2(EF)_1 - \frac{2(1-P)\ (1-2P)}{P^2} \sum_i \left(\frac{a_i-a_L}{a_L}\right)^2 \left(\frac{M_i}{M}\right)^3$$

Note-se:

(i) — O erro fundamental é um erro patamar função da heterogeneidade de constituição da matéria e que constitui um mínimo incompressível. De todos os erros de amostragem é o único que nunca se anula. É o erro que se comete quando a amostragem é realizada em condições ideais.
(ii) — O viés fundamental $M(EF)_2$ é desprezável em face do desvio padrão $\sigma^2(EF)$ e anula-se quando:

— $P=1$
— $a_i=a_L$
— $M_i=M_L/N_L$
— $\rho(a_i, M_i)=0$

4.3.3.3. — Condições de minimização de $\sigma^2(EF)$

São as condições (i) e (iv) de 4.3.2, i.é., aumentando P ou fragmentando o lote.

4.3.4 — Erro de Segregação

4.3.4.1 — Definição

É a grandeza ES cujos dois primeiros momentos são iguais à diferença entre os momentos correspondentes de EI_2 e de EF.

4.3.4.2 — Momentos de ES

Indica-se apenas a 1.ª aproximação que, na prática, é sempre suficiente:

$$m(ES)_1 = m(EI_2)_1 - m(EF)_1 = 0$$

$$\sigma^2(ES)_1 = \sigma^2(EI_2)_1 - \sigma^2(EF)_1 = \gamma \ \xi \ \sigma^2(EF)_1$$

$\sigma^2(ES)$ só pode ser estimado a partir de $\sigma^2(EI_2)$ — análise variográfica — e de $\sigma^2(EF)$, cuja estimação «à priori» e «posteriori» iremos ver na secção 4.3.5.

4.3.5 — Estimação prática dos momentos do erro fundamental

4.3.5.1 — Existem fundamentalmente três métodos para, na prática, estimar a variância do erro fundamental:

(i) — Um método preciso baseado na análise granulodensitária completa detalhada do material a amostrar. Por já estar suficientemente descrito na bibliografia e porque exige uma experimentação longa, delicada e muito cara não o descreveremos em detalhe.

(ii) — Um método rápido derivado do precedente. Permite fixar em poucos minutos a ordem de grandeza da variância fundamental sem qualquer suporte experimental. Aplica-se unicamente aos minérios contendo um elemento crítico sob a forma dum mineral único.

Pode adaptar-se a outros materiais a granel desde que os seus constituintes:

* Sejam nitidamente expressos;
* tenham composição e propriedades aproximadamente constantes;
* estejam justapostos no seio dos fragmentos e não em solução uns nos outros.

(iii) — Um método prático baseado na colheita de uma amostra representativa de cerca de 50 fragmentos da classe granulométrica mais grosseira e na determinação da massa, do volume e do teor de cada fragmento.

É um método mais simples, mais rápido e mais barato que o primeiro. Exige unicamente equipamento laboratorial corrente e é aplicável a numerosos materiais a granel: minérios, produtos metalúrgicos, materiais não minerais, etc.

4.3.5.2 — Método expedito (ii)

$$\text{Seja } S' = M_L \times \sum_i \left[\frac{a_i - a_L}{a_L} \ \frac{M_i}{M_L} \right]^2$$

Da exploração dos resultados da aplicação da análise granulodensitária, tem-se:

$$S' = \sum_\alpha V_\alpha \sum_\beta (a_{\alpha\beta} - a_L)^2 . M_{\alpha\beta}/a_L \ M_L \quad (1)$$

$$\sigma^2(EF)_1 = S' \ (1-P) \ / \ PM_L = S'(1/M_E - 1/M_L) \quad (2)$$

* Transformação de S' num produto de dois factores. De (1) tira-se

$$S' = \sum_\alpha \sum_\beta V_{\alpha\beta} \overline{\mu}_\alpha \ (a_{\alpha\beta} - a_L)^2 \ M_{\alpha\beta}/a_L^2 \ M_L$$

A experiência mostra que o teor $a_{\alpha\beta}$ depende muito mais de α do que β, pelo que se fará a 1.ª aproximação:

$$\forall \ L_{\alpha\beta} \subset L_\beta \ ; \ a_{\alpha\beta} = a_\beta$$

Verifica-se também que $M_{\alpha\beta}/M_\beta$ habitualmente varia pouco duma classe densitária para outra o que conduz à 2.ª aproximação:

$$\forall \ L_{\alpha\beta} \subset L_\alpha \ ; \ M_{\alpha\beta}/M_\beta = M_\alpha / M_L$$

Então:

$$S' = S'_1 \times S'_2 \text{ em que}$$

$$S'_1 = \sum_\beta \overline{\mu}_\beta \ (a_\beta - a_L)^2 M_\beta / a_L^2 \ M_L$$

$$S'_2 = \sum_\alpha V_\alpha \ M_\alpha / M_L$$

* Expressão simplificada de S'_1.

Os valores extremos de S'_1 são:

O — Quando o lote é rigorosamente homogéneo.

$c = [(1-a_L)/a_L]^2 a_L \ \mu_A + g_L \ \mu_G$ quando o lote é constituído por partículas inteiramente livres.

Na prática: $O \leqslant S'_1 \leqslant c$.

Escrever-se-á então:

$$S'_1 = c . l$$

c — Parâmetro mineralógico $[M \ L^{-3}]$ (1)

l — Parâmetro de libertação (sem dimensões).

(1) É necessário exprimir os teores em valor decimal e em mineral e não em metal.

* Expressão simplificada de S'_2

$$S'_2 = \sum_{\alpha} f_{\alpha}\, d^3_{\alpha}\, M_{\alpha}/M_L$$

Como d^3_{α} diminui rapidamente pode considerar-se unicamente o d_{α} da fracção mais grosseira $d_{\alpha} = \phi_{95} = d$.

$S'_2 = f.\,g.\,d^3$ em que

f — parâmetro de forma (sem dimensões) $\simeq 0.5$
g — parâmetro granulométrico ($g \simeq 0.25$)
d — ϕ_{95}.

$$* \ \sigma^2(EF) = c.\,l.\,f.\,g.\,d^3\left(\frac{1}{M_E} - \frac{1}{M_L}\right)$$

$$\simeq c.\,l.\,f.\,g.\,d^3/M_E$$
$$= C\,d^3/M_E$$

Já suficientemente descrito na bibliografia.

4.3.5.3 — Método prático

Procede-se como indicado em 4.3.5.1 (iii).

(i) — Estimação de S'_1

$$\dot{S}'_1 = \sum_{q} (a_q - a_Q)^2\, M_q^2/V_q\, a_Q^2\, M_Q$$

em que

a_q — teor de F_q
M_q — massa de F_q
V_q — volume F_q
a_Q — teor de L_Q
M_Q — massa de L_Q

(ii) — Estimação de S'_2

$$S'_2 = \sum_{\alpha} V_{\alpha}\, M_{\alpha}/M_L = f \sum_{\alpha} d^3_{\alpha}\, M_{\alpha}/M_L =$$

$$= 0.5 \sum_{\alpha} d^3_{\alpha}\, M_{\alpha}/M_L$$

ou então $S'_2 = f.\,g.\,d^3 = V/4$

o que conduz a:

$$\hat{\sigma}^2(EF) = S'_1 \times S'_2/M_E = \hat{S}'_1\, \overline{V}/4\, M_E$$

(1) De notar que C é função de d a partir de 1.

4.3.6 — Exemplos de aplicação

4.3.6.1 — Método expedito

O método descrito em 4.3.5.1 permite resolver problemas do tipo:

(i) — Cálculo da variância fundamental
$\sigma^2(EF) = C\,d^3/M_E$

(ii) — Cálculo da massa da amostra a escolher (C e d fixados) para que $\sigma^2(EF) \leq \sigma_o^2$
$M_E \geqslant M_{EO} = C\,d^3/\sigma_o^2$

(iii) — Cálculo da dimensão crítica a que é necessário moer o minério nas condições do problema posto

$$d \leq d_o = \sqrt[3]{M_E\,\sigma_o^2/C} \quad (1)$$

4.3.6.2 — Método prático

Apresenta-se um exemplo dum minério de ferro da região de Cassinga, Sul de Angola.

De acordo com o método operatório já sumariamente descrito constituiu-se um lote de trabalho L do qual se colheu, ao acaso, uma amostra de 46 fragmentos da classe granulométrica mais grosseira.

Para cada um destes fragmentos foi determinado:

— massa M_q [g]
— volume V_q [cm³]
— teor a_q [% F_e]

Os resultados constam do quadro 6.

Seguidamente calcula-se:

$a_Q = 37.91$ % F_e ; $a_Q^2 = 1437.17$ (% F_e)^2

$M_Q = 5\,371$ g ; $V_Q = 1\,733$ cm³ ; $V = 37{,}67$ cm³

$$\sum (a_q - a_Q)^2\, M_q^2/V_q\, a_Q\, M_Q = 488.5\ g^2\ cm^{-3}$$

$$\dot{S}'_1 = \sum (a_q - a_Q)^2\, M_q^2/V_q\, a_Q^2\, M_Q = 0.63\ g.\ cm^{-3}$$

$$S'_2 = 0.25\ V = 9{,}4\ cm^3$$

$$\hat{S}' = \dot{S}'_1 \times \dot{S}'_2 = 5.9\ g \Rightarrow \sigma^2(EF) = 5.9\left(\frac{1}{M_E} - \frac{1}{M_L}\right)$$

A partir destes resultados é possível calcular a constante de amostragem C para se poderem resolver os três problemas clássicos.

QUADRO 6

q	M_q grama	V_q cm³	a_q Fe %	q	M_q grama	V_q cm³	a_q Fe %
1	163	42	55,31	25	189	49	53,83
2	121	44	21,33	26	157	48	43,91
3	116	39	37,86	27	116	42	38,66
4	127	39	45,62	28	66	24	38,09
5	78	29	13,91	29	141	53	6,01
6	102	26	50,86	30	128	39	39,91
7	60	23	42,65	31	138	50	21,36
8	142	48	44,13	32	89	31	22,80
9	105	34	26,91	33	150	42	45,73
10	119	45	36,84	34	100	41	4,79
11	61	19	43,22	35	208	60	47,55
12	149	57	4,11	36	127	39	41,39
13	95	37	6,04	37	146	49	48,58
14	95	39	7,33	38	117	30	59,07
15	198	77	43,91	39	102	38	20,53
16	107	27	53,14	40	71	29	10,38
17	172	43	61,58	41	81	29	44,82
18	120	29	62,72	42	82	36	3,40
19	119	33	38,20	43	105	31	41,28
20	104	28	44,48	44	116	33	48,13
21	121	33	44,93	45	110	31	46,83
22	91	32	47,56	46	67	26	7,64
23	148	40	63,52				
24	52	20	7,30	Σ q	5371	1733	37,91

Assim, considerando $f = 0.5$, teremos:

$$d^3 = V/f = 75.34 \text{ cm}^3$$
$$d = 4.22 \text{ cm}$$
$$C = S'/d^3 = 0.078 \text{ g . cm}^{-3}$$

$$\sigma^2(EF) = \left(\frac{1}{M_E} - \frac{1}{M_L}\right) C\ d^3$$

O cálculo do desvio padrão conduziu aos seguintes valores:

Massa da amostra	$\sigma(a_E)$ [% Fe]	$\pm 2\sigma_E$
10 kg	1,09	2,18
100 kg	0,35	0,70
1 000 kg	0,11	0,22
10 000 kg	0,035	0,07

4.3.7 — Notas

Na expressão $\sigma^2(EF) = \left(\frac{1}{M_E} - \frac{1}{M_L}\right) c.\ f.\ l.\ g.\ d^3$

c — Parâmetro mineralógico — traduz a influência da constituição da matéria amostrada. É devido a este parâmetro que quando se utiliza esta expressão se têm que exprimir os teores em valores decimais de mineral e não de metal;

l — parâmetro de libertação traduz simultaneamente a influência da estrutura da matéria e do grau de individualização dos seus constituintes;

f — parâmetro de forma — traduz a influência — fraca — da forma dos fragmentos;

g — parâmetro granulométrico — traduz a influência — fraca — da maior ou menor granularidade do minério;

d — ϕ_{95} — traduz a influência do estado absoluto de fragmentação.

4.4 — Análise do Processo de materialização dos incrementos pontuais

4.4.1 — Introdução

Como vimos em 1.3.1, o processo de amostragem por implantação de incrementos («colheita») pode ser considerado como a sequência de quatro operações: integração, «découpe», toma e reunião.

A integração foi estudada no Cap. 3. A reunião é uma operação exacta. A materialização dos incrementos pontuais, efectuada em duas etapas «découpe» e toma, é geradora de erros que são estudados no âmbito do modelo probabilista. Antes de entrar no detalhe, iremos examinar o conjunto de transformações que permitem passar do modelo à realidade e quais os erros que originam.

4.4.2 — Lotes com uma dimensão temporal ($\overline{OT_L}$)

(i) — Ponto de partida — incremento pontual.

O incremento é representado por um ponto x do eixo dos tempos. O teor a_L de L é rigorosamente:

$$a_L = \int_o^{T_L} a(x)\ \mu(x)\ dx \Big/ \int_o^{T_L} \mu(x)\ dx$$

(ii) — Primeira transformação — incremento segmentado.

O incremento é representado por um segmento de comprimento T_c centrado em x.

O teor do material amostrado é representado pela função $a_c(x)$ regularizada de a(x) à escala do segmento de comprimento T_c. É a média de a(x), ponderada pelo caudal pontual $\mu(x)$ no interor de T_c.

O caudal é representado por $\mu_c(x)$, regularizado de $\mu(x)$ à escala de T_c. É a média simples no interior de T_c.

O teor a_L do lote será:

$$a_L = \lim_{T_c \to o} \int_o^{T_L} a_c(x)\ \mu_c(x)\ dx \Big/ \int_o^{T_L} \mu_c(x)\ dx$$

como $T_C \ll T_L$ pode admitir-se

$$a_L = \int_o^{T_L} a_c(x)\ \mu_c(x)\ dx \Big/ \int_o^{T_L} \mu_c(x)\ dx$$

Esta identidade prática não é geradora de erros apreciáveis, desde que $T_C \ll T_L$.

(iii) — 2.ª transformação.

A matéria, que suposemos condensada no eixo dos tempos, ocupa realmente um certo volume no espaço geométrico contido entre dois planos paralelos (mas não paralelos ao eixo dos tempos) distanciados de T.

É a «découpe» modelo, fatia de espessura constante da matéria não discretizada.

Esta identidade não é geradora de erros.

(iv) — 3.ª transformação — «Découpe» real — Erro de «Découpe».

A operação de colheita é habitualmente realizada por um recipiente — o amostrador — que no instante da colheita é levado a interceptar a envolvente do fluxo de material recortando naquele fluxo um volume a que chamaremos «découpe» real.

A experiência mostra que nem sempre as superfícies são planas nem paralelas o que conduz a uma não uniformidade de probabilidade de colheita dos diferentes fragmentos, devido à maior ou menor correlação entre as características granulo-densitárias de um fragmento e a sua posição espacial no fluxo do material.

É esta incorrecção que gera os erros de «découpe».

(v) — 4.ª transformação — «découpe» discreta.

A «découpe» discreta é constituída pelo conjunto de fragmentos cujo centro de gravidade está no interior da «découpe» real. Corresponde à selecção que se opera, em condições ideais, quando os fragmentos caem sobre uma aresta fixa ressaltando para o lado onde se projecta o seu centro de gravidade.

Esta transformação corresponde a uma equivalência estatística, pois pode demonstrar-se que a diferença entre as composições das «découpes» real e discreta é uma variável aleatória de média nula.

Não é portanto geradora de erros.

(vi) — 5.ª transformação — incremento real — erro de toma.

O incremento real é constituído pelos fragmentos que penetram efectivamente no amostrador e nele permanecem.

As condições que conduzem a uma identidade entre a «découpe» discreta e o incremento real são:

a) — Condições ligadas à queda dos fragmentos:

* os fragmentos devem cair um a um;
* devem cair verticalmente;
* devem cair sem energia de «spin».

b) — Condições ligadas ao amostrador:

* a abertura do amostrador deve ser limitada por arestas lineares sem espessura;
* as arestas devem ser horizontais;
* as arestas devem estar suficientemente afastadas uma da outra, sem o estarem infinitamente;
* as arestas devem estar imóveis;
* o amostrador deve ser concebido por forma a respeitar a integridade dos incrementos.

Quando uma destas condições não for respeitada, não se verifica a regra do ressalto, não havendo identidade entre a «découpe» discreta e o incremento real, gerando-se assim um *erro de toma*.

Pode pois concluir-se que na materialização dos incrementos reais há duas operações susceptíveis de gerar erros: *«Découpe»* e *Toma*.

A Fig. 4 esquematiza o que acabamos de escrever.

RECAPITULAÇÃO ESQUEMÁTICA DA PASSAGEM DO MODELO DE INTEGRAÇÃO À REALIDADE

Projecção a duas dimensões
(Segundo P. Gy)

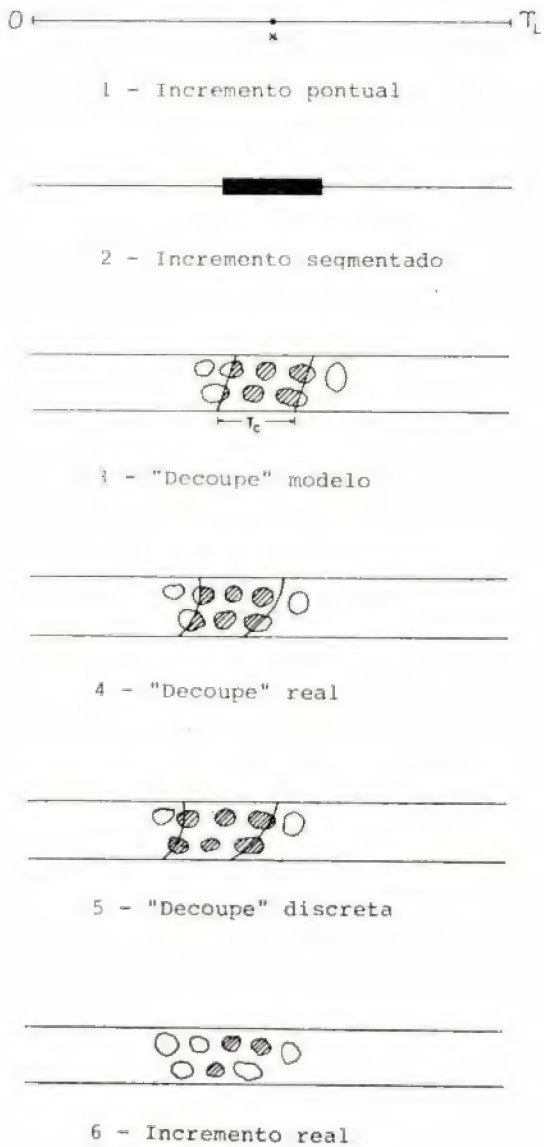
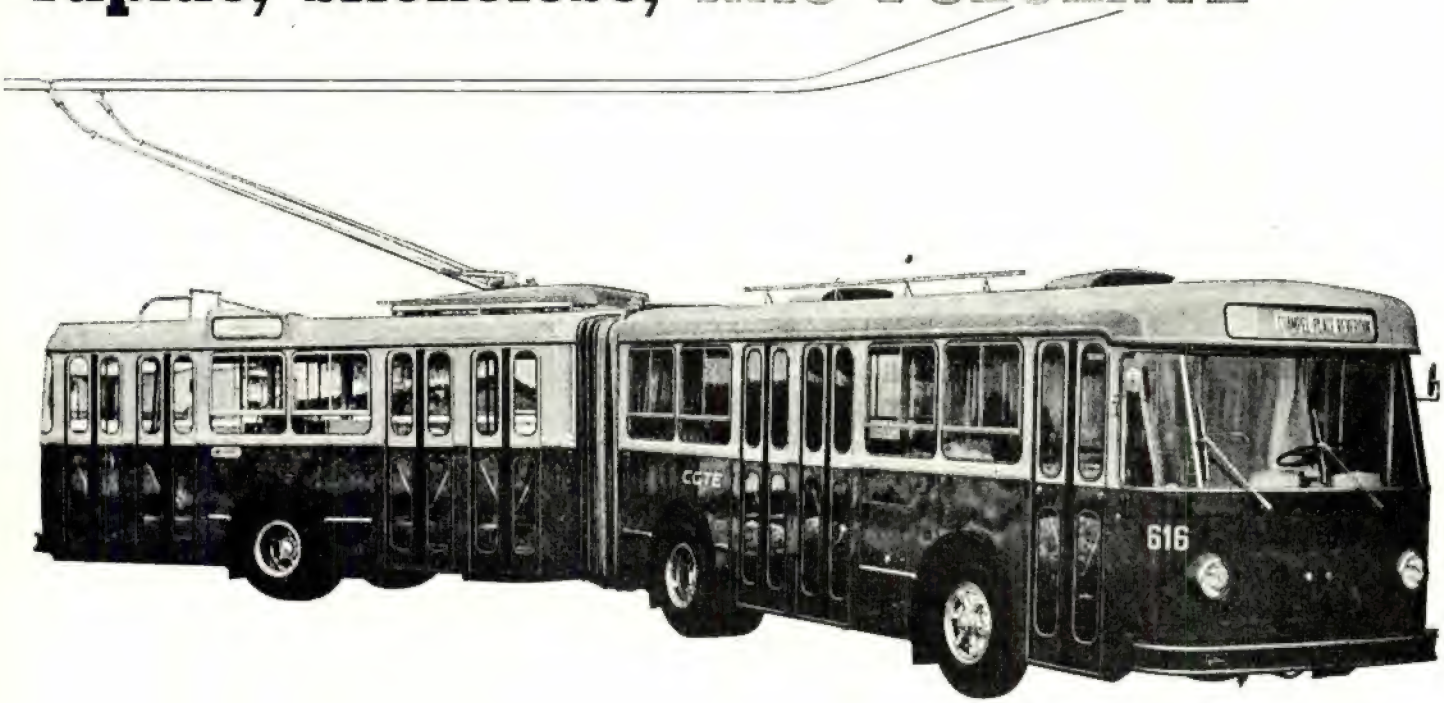


Fig. 4

A tracção ELÉCTRICA é o ÚNICO meio de TRANSPORTE suave, rápido, silencioso, NÃO POLUENTE



tudo isto é igualmente válido para o TROLEICARRO

sécheron

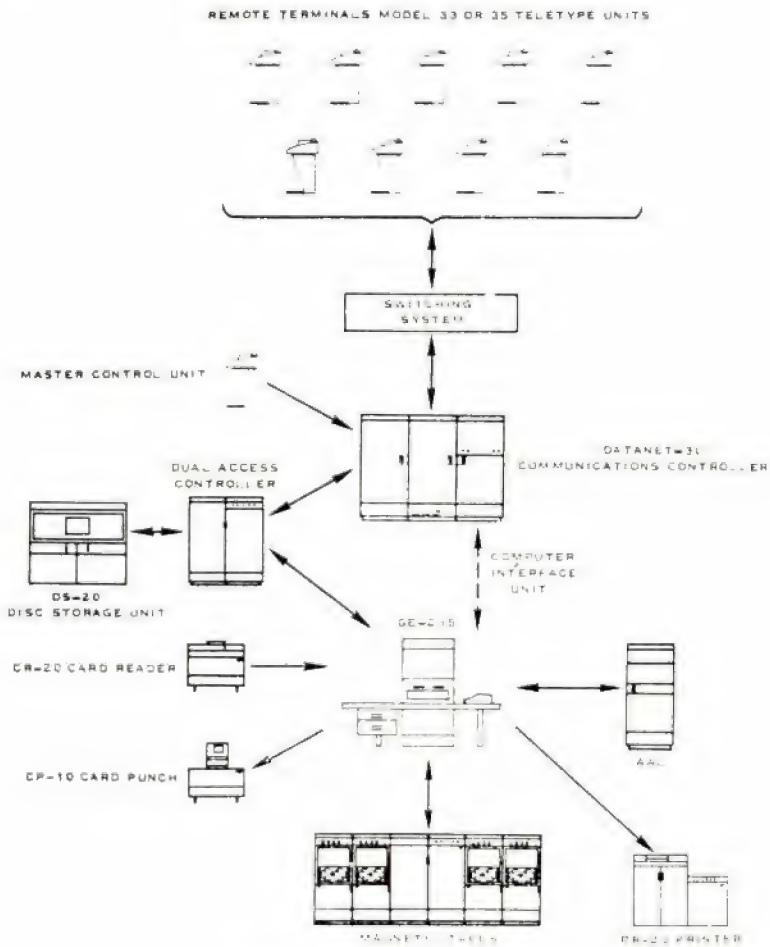
S. A. des Ateliers de Sécheron 1211 Genève 21

Representada em Portugal por:

SOCIEDADE DE ELECTRICIDADE BROWN BOVERI, LDA.
Rua de Sá da Bandeira, 481-2.º — PORTO
Telef. 23411/21148/380019

sociedade portuguesa de computadores em tempo dividido (time-sharing) s. a. r. l.

Av. 5 de Outubro 95-3º. Dto. 1000 – LISBOA
Telefones 76 95 51/2/3 – 76 27 87 – 77 09 52



MARK I TIME–SHARING SYSTEM

Para além da Prestação de Serviços às Empresas nossas clientes,
A colaboração e apoio que, ao longo de oito anos, temos prestado às Universidades, Institutos Técnicos, Liceus e Centros de Investigação, constitui uma linha de força maior da nossa actividade.
Tal colaboração tem-se traduzido, não só em palestras, cursos de análise e programação, estágios, resolução de problemas académicos, etc., como em condições especiais de utilização dos sistemas Time–Sharing.

GE – 265 MARK I
(Sociedade Time Sharing)

DEC SYSTEM 10
(Lab. Nacional de Engenharia Civil)

A instalação de terminais nos locais de trabalho, permite o contacto telefónico com os dois computadores acima referidos e, em casos especiais, com a rede europeia de

MARK III

4.4.3 — Lotes com 1, 2 ou 3 dimensões espaciais

Pode reconstruir-se, para cada um destes lotes, a sequência que acabámos de indicar.

Pode ainda acrescentar-se que, suprimindo a 4.ª transformação («découpe» discreta) e modificando ligeiramente a formulação da 5.ª, podem deduzir-se um certo número de conclusões válidas para sólidos compactos não fragmentados tais como

* jazigos mineiros;
* produtos metalúrgicos: lingotes ou chapas metálicas.

4.5 — Erro de «découpe»

4.5.1 — Definição

Como vimos, o erro de «découpe» surge quando a «découpe» real, efectuada pelo amostrador no domínio D_L ocupado pelo lote L, difere da «découpe» modelo definida em função do número p de dimensões do modelo representativo do lote.

Em coordenadas cartesianas:

* $p=3$ — é um cubo;
* $p=2$ — é uma coluna de secção constante e quadrada e de altura igual à espessura do lote;
* $p=1$ — é uma fatia de espessura constante cortando inteiramente a secção do lote.

4.5.2 — Condições teóricas de amostragem correcta(1)

Uma amostragem é correcta quando assegura a todos os fragmentos F_i de L uma igual probabilidade de pertencerem à amostra E.

Ora, a probabilidade de colheita de F_i é:

$$P_i = \int_{D_L} f_i(x)\ g(x)\ dx$$

em que

$f_i(x)$ — densidade de probabilidade de presença de F_i no ponto x — distribuição espacial de F_i;

$g(x)$ — densidade de probabilidade de localizar um incremento no ponto x(2) — distribuição espacial dos incrementos.

A condição de correcção será pois:

$$\forall F_i \in L:\ P_i = \int_{D_L} f_i(x)\ g(x)\ dx = P \quad (0 \leq P \leq 1)$$

As condições teóricas de distribuição dos incrementos $g(x)$ que asseguram a correcção, para os diferentes tipos de distribuição espacial, ou seja, de homogeneização do lote, estão expressos no quadro 7.

QUADRO 7

DISTRIBUIÇÃO CORRECTA DOS INCREMENTOS

Tipo de homogeneidade	Distribuição dos fragmentos $F_i(x)$	Distribuição dos incrementos, assegurando amostragem correcta	Tipo de Lote
Tridimensional	f_o	$g(x, y, z)$ — qualquer	de forma qualquer
bidimensional	$f_i(z)$	$g(x, y)$ — uniforme em z	tabular
unidimensional	$f_i(y,z)$	$g(x)$ — uniforme em (y, z)	parqueamento alongado; lote em deslocamento (correia transportadora)
de revolução	$f_i(\rho,z)$	$g(\phi)$ — uniforme em ρ e z	de revolução (enquartação)
heterogéneo	$f_i(x, y, z)$	g_o — uniforme	de forma qualquer

(1) Por amostragem considerámos aqui o conjunto «integração» — «découpe».

(2) A probabilidade de que D_E englobe um ponto qualquer de D_L é D_E/D_L e é igual a $\frac{1}{D_L}\int_{D_L} g(x)\ dx$.

Pode concluir-se dizendo que:

* Se podem seleccionar livremente a(s) coordenada(s) de homogeneidade;

* se deve seleccionar a(s) coordenada(s) de heterogeneidade e atribuir-lhe(s) uma densidade uniforme de probabilidade.

4.5.3 — Condições Práticas de «découpe» correcta

4.5.3.1 — Lotes com uma dimensão temporal

4.5.3.1.1 — Amostradores «transversais»

Definem-se amostradores «transversais» como aqueles que colhem *a totalidade* do fluxo durante uma parte do tempo.

Demonstra-se que um amostrador «transversal» realiza uma «découpe» correcta quando e só quando assegurar a cada linha de fluxo y de material, uma igual duração de colheita $T_q(y)$ = constante. Caso contrário a «découpe» é incorrecta.

Também se demonstra que o erro de «découpe» é identicamente nulo quando e só quando a «découpe» realizada é correcta.

As condições práticas da correcção estão esquematizadas no quadro 8.

O respeito pelas condições geométricas do amostrador está esquematizado nas Fig. 6 e 7.

4.5.3.1.2 — Amostradores «não transversais»

São amostradores que colhem uma parte do fluxo durante a totalidade ou uma parte do tempo.

Originam erros sistemáticos que podem ser graves. São desaconselháveis e estão a cair em desuso.

4.5.3.2 — Lotes com dimensão zero

Um lote tem dimensão zero quando está naturalmente dividido num grande número de unidades de peso estatístico igual e de peso físico aproximado (ex.: comboio de vagons de minério — método da pazada, etc.).

O erro de «découpe» é nulo se se proceder à amostragm primária desses lotes através a colheita dum certo número de unidades inteiras.

4.5.3.3 — Lotes com uma dimensão espacial

Só pode ser considerada correcta a «découpe» do tipo da que é executada com um quadro sobre uma correia transportadora parada (vide Fig. 5).

4.5.3.4 — Lotes de material a granel com 2 ou 3 dimensões espaciais de revolução

É extremamente difícil na prática efectuar uma «découpe» correcta por muito onerosa ou mesmo impossível.

4.5.3.5 — Conclusão

Pode concluir-se que só a amostragem dos lotes em deslocamento contínuo (unidimensional) ou descontínuo (dimensão zero) pode assegurar, na prática, a realização de uma «découpe» correcta.

4.6 — Erro de toma

4.6.1 — Definição

O erro de toma surge quando o conteúdo do incremento real difere do da «découpe» discreta, isto é, quando a regra do ressalto não é respeitada.

Vejamos seguidamente as condições práticas de toma correcta (1).

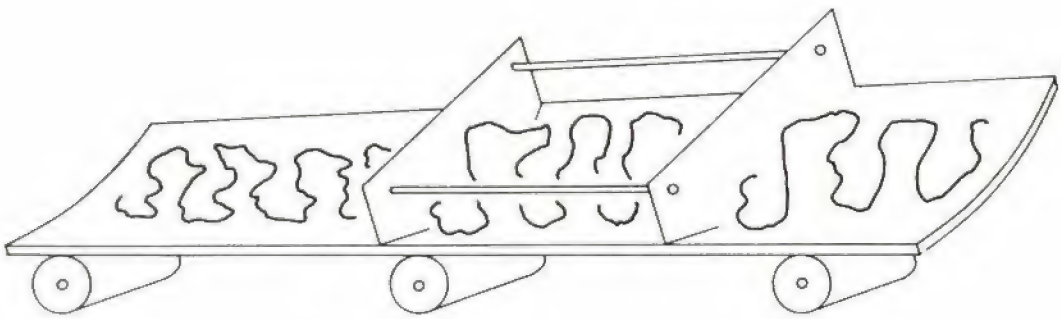


Fig. 5

(1) As condições teóricas estão descritas em 4.4.1 (vi).

QUADRO 8

AMOSTRADORES TRANSVERSAIS — CONDIÇÕES DE «DÉCOUPE» CORRECTA

Condição de «découpe» correcta: todas as linhas de fluxo y devem ser interseptadas num intervalo de tempos constante

- Uniformidade de $T_q(y)$ — duração de colheita — no espaço (W_q/V_q)
  - Condição cinemática: Velocidade $V_q(y)$ uniforme em cada incremento
    - *a*) Comando eléctrico: Correcto se o motor for sobredimensionado e as posições de repouso do amostrador forem suficientemente afastadas do fluxo do material.
    - *b*) Comando hidráulico, pneumático ou manual: sempre incorrecto (a evitar).
  - Condição geométrica: Largura $W_q(y)$ Forma e instalação do amostrador
    - Concepção do amostrador:
      1) Trajectória rectilínea: correcta se arestas paralelas.
      2) Traject. circular: correcta se arestas radiais.
      3) Qq. outra traject.: (amostra. manual) sempre incorrecta.
    - Instalação e manutenção do amostrador:
- Uniformidade de $T_q(y)$ no tempo
  - Condição cinemática: Velocidade $V_q(y)$ uniforme de um incremento para outro
    - *a*) Comando eléctrico: Praticamente correcta se as flutuações de tensão e frequência da rede eléctrica não forem elevadas. Erro similar ao da flutuação do caudal ED.
    - *b*) Comandos hidráulico, pneumático ou manual: incorrectas — a evitar.
  - Condição geométrica: Largura uniforme de um incremento para outro
    - Largura uniforme: Correcta se se limpa periódica e frequentemente a abertura do amostrador e se se vigia a deformação e o desgaste.

a) Interseptar totalmente o fluxo do material. *b*) Evitar as poeiras. *c*) Posições convenientemente afastadas do fluxo do material. *d*) Limpar periódica e frequentemente a abertura do amostrador. *e*) Vigiar a deformação e o desgaste da abertura.

4.6.2 — Lotes de material a granel com uma dimensão temporal amostrados com um amostrador «transversal»

(i) — Os fragmentos tombam um a um.

Na prática os fragmentos tombam sob a forma dum fluxo mais ou menos compacto. Quando um fragmento ressalta sobre uma aresta interfere com a trajectória dos outros fragmentos.

No entanto pode admitir-se que na parte central do fluxo a reacção é estatisticamente simétrica.

Na periferia a reacção é centrífuga. Mas como o amostrador possui duas arestas pode admitir-se que elas desempenham papéis simétricos.

Pode pois concluir-se que a realidade é estatisticamente equivalente ao modelo correcto.

(ii) — Os fragmentos caiem verticalmente.

Também aqui a alteração é simétrica ao nível das duas arestas do amostrador, podendo concluir-se que a realidade é estatisticamente equivalente ao modelo correcto.

(iii) — Os fragmentos caem sem energia de «spin».

Também aqui a alteração é simétrica em relação às duas arestas podendo também concluir-se que não há erro de toma nos casos reais.

«DÉCOUPE» CORRECTA: Respeito pela condição geométrica — Concepção do amostrador

(Segundo P. Gy)

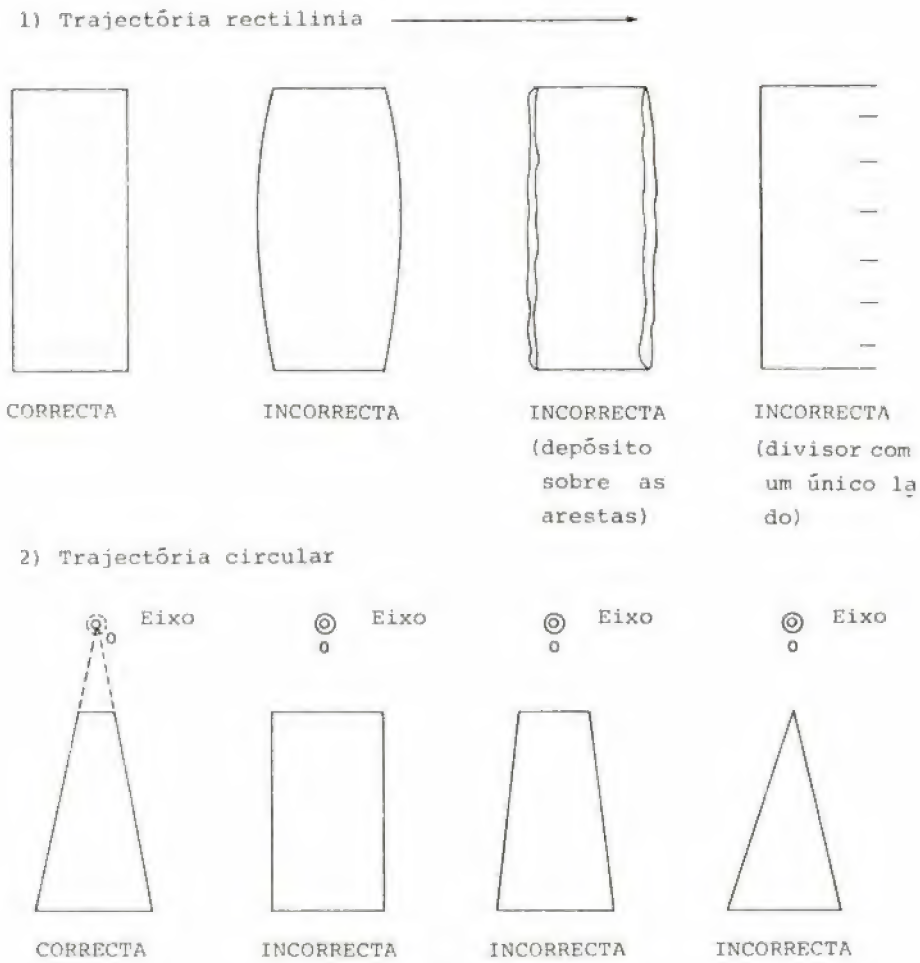


Fig. 6

(iv) — A abertura do amostrador é limitada por arestas lineares.

Na medida em que as pequenas deformações devidas ao desgaste não comprometerem nem a forma nem as dimensões originais do amostrador, pode afirmar-se que não há erro de toma.

(v) — As arestas do amostrador são horizontais.

Sempre que não forem horizontais a regra do ressalto não pode ser respeitada, cometendo-se um erro de toma que afecta tanto mais os fragmentos quanto mais grosseiros forem (vide fig. 9).

(vi) — As arestas devem ser largamente afastadas uma da outra.

Se esta condição se não der, as partículas, sobretudo as mais grosseiras, podem ressaltar para fora do amostrador como se indica na Fig. 8.

Para que a toma seja correcta é necessário que a largura W da abertura do amostrador, no sentido do seu deslocamento, seja

$$\forall\, d > 3\text{ mm}: W \geqslant W_o = 3\,d$$
$$\forall\, d \leq 3\text{ mm}: W \geqslant W_o = 10\text{ mm}$$

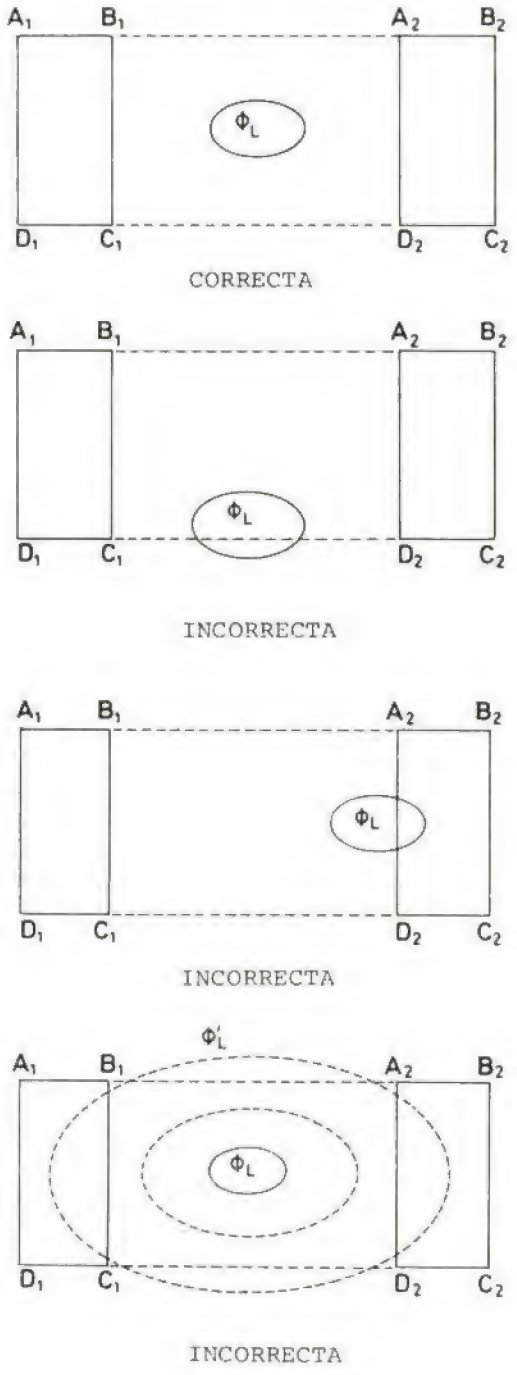
Se esta condição não for satisfeita, ocorre um efeito estatístico de crivagem que altera selectivamente a probabilidade de toma dos fragmentos de maior calibre.

(vii) — As arestas do amostrador são imóveis.

Como é óbvio o amostrador tem de deslocar-se em relação ao fluxo do material.

«DÉCOUPE» CORRECTA: Respeito pela condição geométrica — Instalação do amostrador

(Segundo P. Gy)



ϕ_L — Secção horizontal do fluxo do material

ϕ'_L — Secção horizontal do fluxo de poeiras

Fig. 7

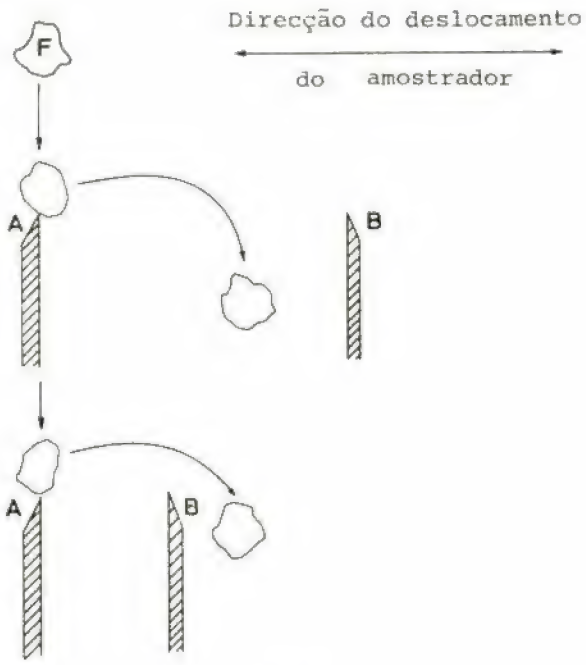


Fig. 8

A experiência prova que a toma é correcta se for respeitada e seguinte a condição cinemática:

É necessário que a velocidade V dum ponto qualquer da abertura do amostrador satisfaça à relação

$$V \leq V_o \, W/W_o$$

em que

$V_o = 400$ mm. s^{-1};

W_o — largura mínima definida em (vi);

W — largura da abertura do amostrador.

Ex.: Consideremos em minério com $d = 25$ mm . $W = 3\,d = 75$ mm.

Para $W = W_o = 75$ mm $\rightarrow V'_o = V_o = 400$ mm. s^{-1}

Para $W = 150$ mm $\rightarrow V'_o = 2V_o = 800$ mm. s^{-1}

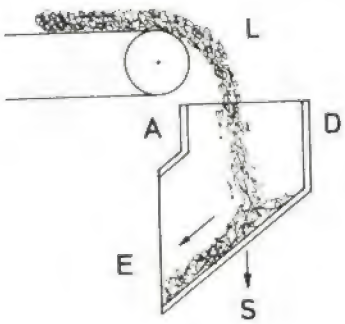
A massa do incremento, sendo proporcional a W/V, é a mesma em ambos os casos.

(viii) — O amostrador deve ser concebido por forma a respeitar a integridade dos incrementos.

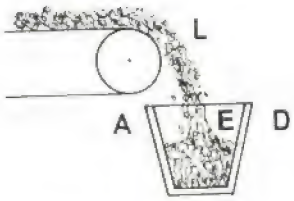
ERRO DE TOMA — INFLUÊNCIA DA ORIENTAÇÃO DAS ARESTAS

Vistas num plano vertical perpendicular ao eixo de deslocação do amostrador

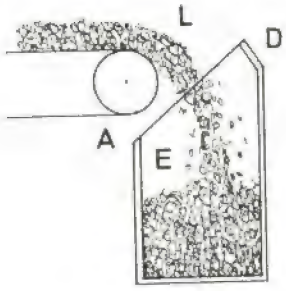
(Segundo P. Gy)



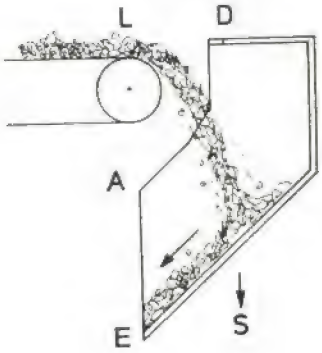
1) Amostrador de colher:
A aresta AD é horizontal



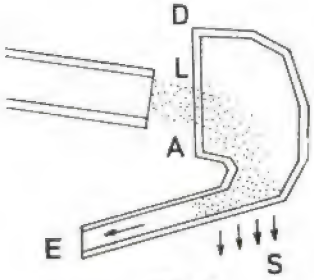
2) Amostrador de godet:
A aresta AD é horizontal.



3) Amostrador de bolso:
A aresta AD é oblíqua.
Há risco de alteração selectiva da probabilidade de toma dos fragmentos de maior calibre.



4) Amostrador de colher envolvente:
A aresta AD é curvilínea.
Mesmo defeito que em 3.



5) Amostrador de polpa de colher:
A aresta AD é vertical.
Mesmo defeito que em 3 mas mais acentuado.

Fig. 9

Deve assegurar:

* que um fragmento que penetre no amostrador não possa sair (colher com pelo menos o dobro da capacidade do incremento — profundidade $> 3d$; arestas com inclinação $> 45°$ ou $60°$ consoante o material for seco ou húmido; evitar correntes de ar desempoeiradoras);

* que não haja contaminação por material estranho (evitar fontes de poeiras, aço inoxidável, protecção de abertura com uma tampa).

4.6.3 — Lotes de material com uma dimensão temporal amostrados com um amostrador não «transversal»

É de evitar.

4.6.4 — Lotes com 0, 1, 2 e 3 dimensões espaciais

(i) — O erro de toma é nulo quando se procede à amostragem dum lote com zero dimensões através da colheita dum certo número de unidades inteiras.

(ii) — O erro de toma é nulo na amostragem de lotes com uma dimensão espacial quando se procede à colheita, com o auxílio de um quadro, sobre uma correia transportadora parada, desde que se tomem precauções quanto aos fragmentos de maior calibre colocados sob as paredes que limitam o quadro.

(iii) — A toma, nos lotes com 2 e 3 dimensões espaciais e de revolução, é sempre delicada, como já se disse ao falar na «découpe».

De notar que a correcção da toma é condição necessária de correcção da amostragem. Só lotes dotados de homogeneidade de constituição (caso ideal sem existência real) podem ser amostrados correctamente com tomas incorrectas.

5. PROCESSOS DE PARTILHA (DIVISÃO)

5.1 — Definição

O processo de partilha consiste na sequência das quatro operações já descritas em 1.3.2, a saber:

* Divisão — conduzindo às fracções-modelo;
* Separação — conduzindo às fracções-reais;
* Escolha — conduzindo aos incrementos reais;
* Reunião — conduzindo à amostra real.

Esta sequência pode ou não ser repetitiva.

É a escolha que constitui a amostragem propriamente dita. As operações preliminares de divisão e separação limitam-se a transformar L num lote com zero dimensões, antes da sua amostragem.

É um processo que se aplica exclusivamente aos lotes manipuláveis, isto é, aos lotes que se aceita manipular com o objectivo de amostragem ou aos lotes cuja transferência impõe a sua manipulação por razões estranhas à amostragem.

5.2 — Momentos do erro cometidos na escolha

Se o lote a amostrar é pequeno e a divisão e a separação forem correctas, pode-se considerar que o erro total de amostragem é igual ao erro de integração EI_2 cujos momentos são:

$$m(EI_2) = 0 \Rightarrow m(a_E) = a_L$$

$$\sigma^2(EI_2) = \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right) \sum_n (a_n - a_L)^2 / N a_L^2$$

$$U^2(a_E) = \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{N}\right) U^2(a_n)$$

Para $Q = N/2 \Rightarrow U^2(a_E) = U^2(a_n)/N$

em que:

N — número de fracções reais G_n cuja reunião constitui L;

Q — número de fracções seleccionadas.

5.3 — Critérios de apreciação de uma partilha

(i) — Para que uma partilha seja rigorosamente justa é necessário e suficiente que:

* a divisão seja correcta;
* a separação seja correcta;
* as massas M_n das fracções reais G_n sejam todas iguais.

(ii) — Para que uma partilha seja aproximadamente justa é necessário e suficiente que:

* a divisão e separação sejam correctas;
* as massas M_n sejam da mesma ordem de grandeza.

(iii) — Para que uma partilha conduza a dispersão nula é necessário e suficiente que $\sigma^2(EI_2) \equiv o$, o que só sucede em dois casos limites:

* $Q = N$ — todo o lote é amostrado;
* $a_n = a_L$ — homogeneidade de constituição.

(iv) — Nem sempre é possível realizar uma partilha fiel (1). Em certos casos seria necessário quer:

* conservar todo o lote;
* fragmentar e homogeneizar o lote antes da divisão para reduzir $U^2(a_n)$;
* rever o nível de fidelidade R_n^2.

(v) — Diz-se que uma amostragem comercial é equitativa quando o valor comercial do lote, calculado a partir do teor da amostra, admite, para média, o valor calculado a partir do teor do lote.

Quando o valor de L é uma função linear do teor, pode dizer-se que a amostragem é equitativa desde que o desvio sistemático, se existir, tenha uma igual probabilidade de favorecer o comprador e o vendedor, ou, na hipótese de uma amostragem de rotina repetida numerosas vezes ao longo do tempo, a esperança matemática do viés, considerado no tempo, seja nula.

Pode resumir-se dizendo:

Toda a partilha se pode dividir numa operação material de separação e numa operação imaterial de escolha. Estas operações só são dissociáveis quando a partilha dá origem a duas ou n fracções gémeas. A justiça é uma propriedade da separação e a equitabilidade é uma propriedade da escolha.

Para que uma partilha seja equitativa é necessária uma das duas condições seguintes:

* ou que a partilha seja justa;
* ou que, sendo a partilha enviezada, dê origem a duas ou n fracções gémeas, entre as quais se selecciona, com uma probabilidade uniforme de escolha, a amostra, utilizando por exemplo, o método da tiragem à sorte.

5.4 — Breve análise crítica dos métodos e aparelhos de partilha

5.4.1 — Pazada fraccionada (vidé fig. 10)

A pazada fraccionada de ordem p é uma generalização da pazada alternada, a qual consiste em retomar um lote de material com uma pá (manual ou mecânica) e colocar a primeira pazada em E_1, a segunda em E_2, a terceira em E_1 e assim sucessivamente. Obtêm-se duas fracções gémeas E_1 e E_2.

A divisão é correcta se a taxa de enchimento da pá for sensivelmente constante.

A separação é correcta se o operador proceder «cegamente», seguindo regularmente o contorno de L até ao esgotamento.

A partilha é equitativa desde que coresponda efectivamente a uma separação em p amostras potenciais gémeas e que a escolha da amostra real seja feita ao acaso dentre aquelas.

Para que a pazada seja fiel, poder-se-á calcular Q(quando $Q \ll N$) como segue (a partir da variância)

$$Q \geqslant Q_o = U^2(a_i)/R_o^2$$

Conhecendo aproximadamente a massa do lote $\dot{M}_l$ e a massa média de cada pazada $\dot{M}_n$, obtém-se:

$$\dot{N} = \dot{M}_L/\dot{M}_n \quad e \quad p = \dot{N}/Q$$

Na prática e como $\sigma^2(EF)$ só depende da massa da amostra(p), para reduzir o erro de segregação (devido a γ) para valores aceitáveis e compatíveis com a economia do processo, admite-se que cada fracção gémea seja constituída por 50 pazadas. Assim, se p for a taxa de redução escolhida e M_L a massa do lote, a dimensão média da pazada será:

$$\dot{M}_n = M_L/50\,p$$

5.4.2 — Enquartação (fig. 11)

A correcção da separação é difícil. A equitabilidade só é assegurada quando os dois sectores circulares opostos, retidos como amostra, sejam escolhidos ao acaso, após a separação ter sido efectuada.

Pode concluir-se que a enquartação, ainda muito usada, é inutilmente complicada e cara pelo número considerável de operadores que exige(2). Em numerosos casos, é aconselhável a sua substituição pelo método da pazada.

5.4.3 — Divisor Jones

É o amostrador mais utilizado nos laboratórios para lotes de sólidos de peso até cerca de uma centena de quilos constituídos por fragmentos com $d \leq 25$ a 30 mm (Fig. 12).

---

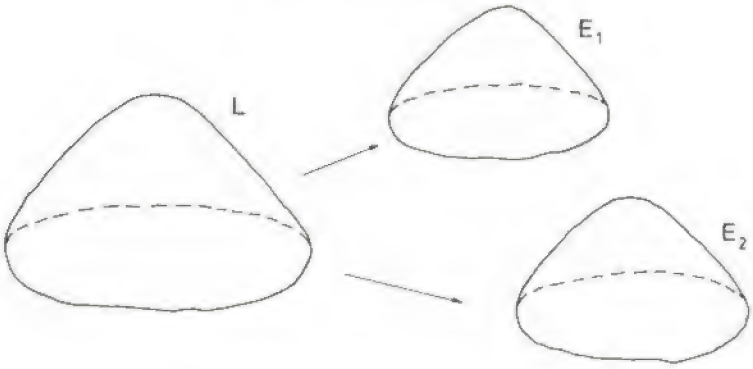
(1) Partilha em 2: $\sum_n (a_n - a_L)^2/N^2\, a_L^2 \leq R_o^2$.

Partilha em p: $U^2(a_n)/Q = \sum_n (a_n - a_L)^2/Q\ Na_L^2 \leq R_o^2$.

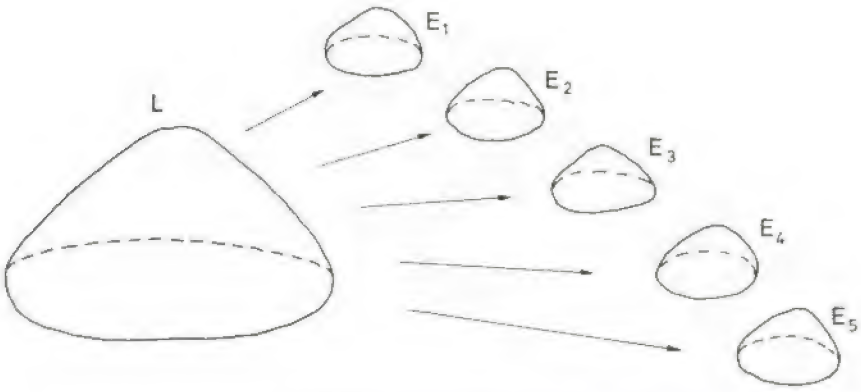
De notar que a_L é um dado do problema e Q e N são dados de construção do amostrador.

(2) Fidelidade: estamos no caso em que N=4 e Q=2. Teoricamente é fiel se $\sum_n (a_n - a_L)^2/16\, a_L^2 \leq R_o^2$. Vê-se pois que a enquartação não oferece qualquer possibilidade de resolver o problema, excepto se se aumentar o número de andares.

PAZADA ALTERNADA



PAZADA FRACCIONADA DE ORDEM 5 (n=5)



PAZADA FRACCIONADA DEGENERADA DE ORDEM 5

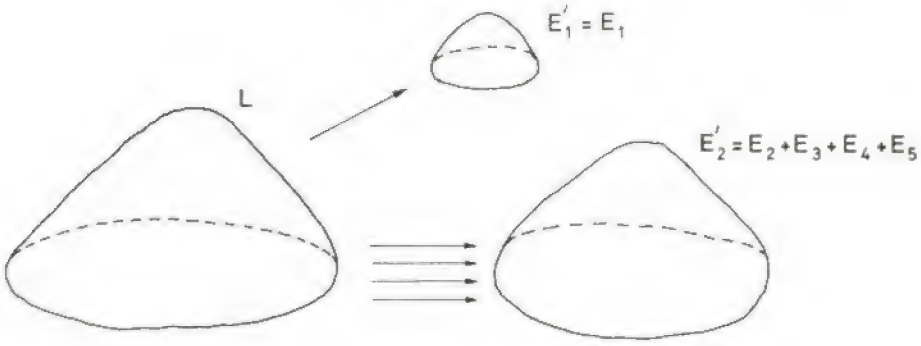


Fig. 10

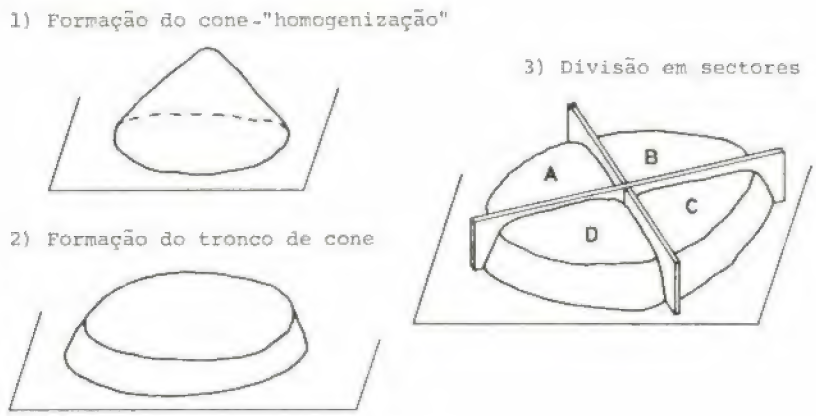


Fig. 11

Para que a partilha seja equitativa é necessário e suficiente que se proceda a uma tiragem à sorte para escolha da fracção — amostra real.

Quanto à fidelidade pode dizer-se:

(i) — o erro fundamental só depende da massa da amostra e, como tal, é independente das características do amostrador;

(ii) — o erro de segregação depende

* da heterogeneidade de distribuição caracterizada pelo parâmetro de segregação ξ. Reduz-se ξ homogeneizando o lote;
* da dimensão dos incrementos, aqui da fracção do lote que atravessa cada uma das ranhuras.

Pode pois concluir-se que um amostrador Jones é tanto mais fiel quanto maior for o número de ranhuras que tiver.

Dados a generalidade e o interesse da sua utilização, indicam-se seguidamente as recomendações necessárias para garantir a correcção da divisão e da separação:

1. O operador deverá despejar a pá no centro das ranhuras, onde estas têm a mesma profundidade.
2. O operador deve despejar a pá num movimento lento e contínuo para evitar o risco de obstrução dos canais e de emissão de poeiras.
3. A largura das ranhuras deverá ser $\geqslant 2d+5$ mm, sendo d o maior calibre das partículas do lote, para impedir a obstrução dos canais e permitir a sua limpeza cuidadosa.

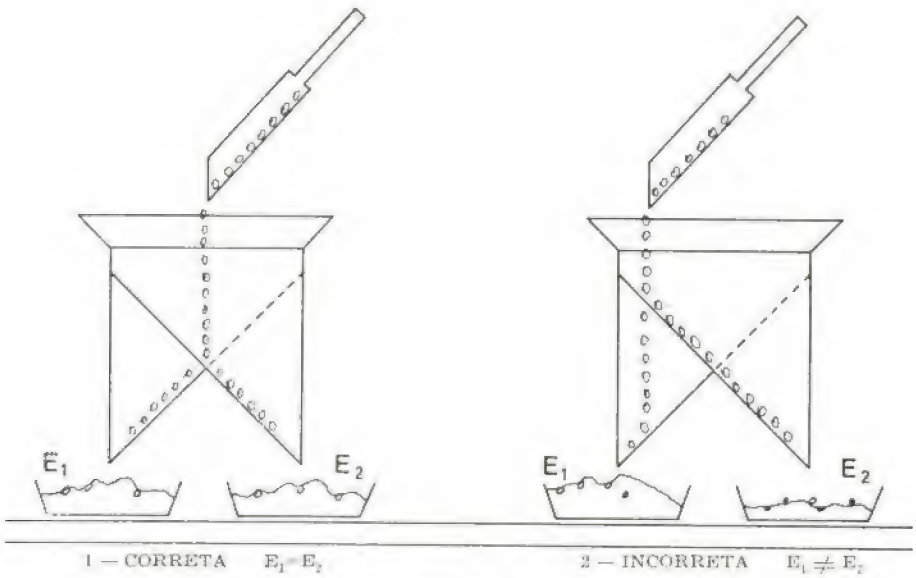


Fig. 12

4. Convém que o material do amostrador seja de aço inoxidável. Os canais devem ter forte inclinação ($\geqslant 45°$) e devem evitar-se os ângulos vivos.

5. O número de canais deve ser obrigatoriamente par e todos devem ter a mesma largura, por forma a que a probabilidade para que um fragmento se encontre numa das duas fracções seja igual a 0.5.

6. A experiência mostra que, qualquer que seja o erro sistemático cometido em cada andar, quando se procede a uma divisão em cascata, uma amostra obtida através um número igual de incrementos à esquerda e à direita do divisor tem elevada probabilidade de ser justa.

5.4.4 — Divisão em N utilizando divisores rotativos (Fig. 13)

Estes amostradores asseguram sempre uma divisão e separação correctas. A equitabilidade é assegurada desde que se tire à sorte a(s) fracção(s) escolhida(s) para amostra.

Quanto à fidelidade pode dizer-se que:

(i) — o erro fundamental depende sobretudo da massa da amostra e, em menor medida, da massa do lote.

(ii) — o erro de segregação depende:

a) da heterogeneidade de distribuição (ξ). Reduz-se homogeneizando o lote, o que é importante quando este é uma polpa de sólidos finos em suspensão em água;

b) da dimensão dos incrementos (γ) depositados em cada alvéolo em cada rotação. Reduz-se aumentando o número de alvéolos ou a velocidade de rotação ou diminuindo o caudal.

Conclusão: os divisores rotativos são excelentes, recomendando-se o seu uso para amostragem de polpas e areias secas. Devem evitar-se na amostragem de lotes de pequena massa ($D_L < 1$ min), de produtos húmidos ou pegajosos, de minérios demasiado grosseiros ou de polpas demasiado instáveis sem prévia agitação.

6. RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE AMOSTRAGEM

6.1 — Introdução

Em face de cada caso concreto e particular é necessário saber como se distribuem os sete erros que analisámos nos Capítulos precedentes: ED, EI_1, EF, ES, EI_3, EC e EP, quais as precauções a tomar para que a amostragem seja justa (pelo menos aproximadamente), quais os valores a atribuir aos parâmetros de funcionamento para que a amostragem seja fiel, numa palavra, quais as faltas a não cometer para obtenção duma amostra representativa.

Neste Capítulo, que não é de modo algum um receituário, nem tem essa intenção, resolveremos sinteticamente um certo número de problemas-tipo de lotes manipuláveis e não manipuláveis de várias dimensões(1). Ver-se-á, inclusivé, que alguns problemas são insolúveis.

Diz-se que um problema de amostragem é solúvel quando é possível definir um modo operatório de colheita da amostra e atribuir-lhe uma certa representatividade caracterizada por $m(ET^2) \leq R_o^2$.

6.2 — Amostragem de lotes sólidos com três dimensões

Teoricamente será necessário colher incrementos distribuídos uniformemente no seio do lote L.

Praticamente, dada a natureza não consolidada do material a granel(2), não há qualquer solução exceptuando a sua transformação em:

(i) — lote a duas dimensões com utilização de «buldozer»;

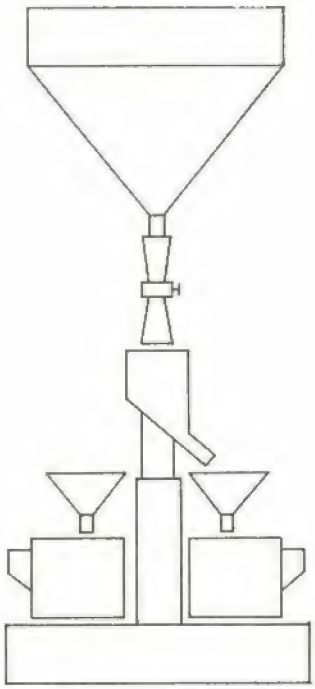


Fig. 13

(1) Pode afirmar-se que a amostragem dos lotes não manipuláveis é tanto mais fácil e barata quanto menor for o número de dimensões do seu modelo.

(2) As vibrações, choques, pressão e acção perfuradora da sonda tiram qualquer representatividade ao testemunho colhido, ao contrário do que sucede com os jazigos mineiros.

(ii) — lote com zero dimensões (retoma total com pá-mecânica);

(iii) — lote com uma dimensão temporal (retoma e colocação sobre correia transportadora).

6.3 — Amostragem de lotes sólidos com duas dimensões

Praticamente é realizável, embora difícil e cara, seleccionando Q valores de X_q e Y_q segundo uma lei de densidade de probabilidade uniforme e colher, em cada ponto, um incremento constituído por uma coluna de secção constante, de forma qualquer (por exemplo: quadrada) e de altura igual à espessura do lote.

6.4 — Amostragem de lotes sólidos unidimensionais

É a mais fácil e barata. Consiste na selecção de pontos X_q, segundo uma lei de probabilidade uniforme, ao longo do eixo do lote e colher, em cada ponto, um incremento constituído por uma fatia de espessura constante e cortando toda a secção do lote.

6.5 — Concepção e cálculo de uma amostragem de lotes com uma dimensão temporal

6.5.1 — Introdução

Quando se concebe uma instalação de amostragem, devem fixar-se certos objectivos dentre os quais destacamos os mais importantes:

1 — definição do destino e características das amostras laboratoriais a obter;

2 — definição dum nível de representatividade R_o^2. A amostra será *representativa* se o erro total de amostragem $ET=(a_E-a_L)/a_L$, de momentos m(ET) e $\sigma^2(ET)$, satisfazer a:

$$R^2=m(ET^2)=[m(ET)]^2+\sigma^2(ET) \leq R_o^2.$$

A representatividade é o único objectivo realista, porquanto a precisão, definida por:

$$m(ET)=o-(\text{justa})$$
$$\sigma^2(ET) \leq R_o^2-(\text{fiel})$$

é impossível porquanto $m(ET) \neq o$ sempre.

Ora, nós vimos que a *correcção* da amostragem assegura uma justiça aproximada, definida por:

$$m(ET) \ll \sigma(ET).$$

Como se sabe definir as condições de realização duma mostragem correcta, assegurar-se-á a representatividade através:

* Correcção: $m(ET) \simeq o$
* Fidelidade: $R^2=\sigma^2(ET) \leq R_o^2$

6.5.2 — Condições que asseguram a correcção

1 — Escolha duma lei de integração conveniente, assegurando uma densidade de probabilidade de colheita uniforme no espaço de L e nula no seu exterior (vidé 3.1 e 3.3).

2 — Escolha duma «découpe» correcta, assegurando, a todos os fragmentos de L, a mesma probabilidade de serem colhidos (vidé 4.5).

3 — Escolha duma toma correcta (vidé 4.6).

4 — Anulação dos erros de preparação.

Nestas condições $EC \equiv EP \equiv EZ \equiv O$ o que conduz a:

$$m(ET) \simeq O$$
$$\sigma^2(ET)=\sigma^2(ED)^{(1)}+\sigma^2(EI_1)^{(2)}+\sigma^2(EF)^{(3)}+\sigma^2(ES)^{(4)}+\sigma^2(EI_3)^{(5)}$$

6.5.3 — Condições que asseguram a Fidelidade

6.5.3.1 — Crédito do erro

O nível de fidelidade R_o^2 é a variância global tolerada na amostragem, no sentido lato. Será pois necessário repartir esta variância por cada um dos andares de amostragem. Trata-se pois dum problema económico cuja solução optimizante será calculada para cada caso concreto.

Como linhas gerais, pode contudo afirmar-se que uma amostragem, no sentido restrito, é tanto mais cara, quanto maiores forem o caudal, a dimensão dos fragmentos e a fidelidade, o que significa que, em geral, a amostragem primária será mais cara que a secundária, etc.

Unicamente a título indicativo, baseado na experiência, poder-se-á dizer que a repartição optimizante das variâncias toma em geral os seguintes valores:

primária:	50 a 75 % de R_o^2
secundária:	25 a 15 % de R_o^2
terciária:	15 a 5 % de R_o^2
total dos outros andares:	10 a 5 % de R_o^2

Vidé: (1) — 3.5.
(2) — 3.6.
(3) — 3.7 e 4.3.
(4) — 3.7 e 4.3.
(5) — 3.8.

Tendo atribuído a cada andar a variância tolerada, será necessário definir as características e condições de funcionamento de cada amostrador.

6.5.3.2 — Escolha das características do amostrador

Admita-se tratar-se dum amostrador «transversal» de movimento rectilíneo e seja:

- W — largura da abertura rectangular do amostrador [cm]
- V — velocidde do amostrador [$cm \cdot s^{-1}$]
- $\mu(t)$ — caudal no instante t [$g \cdot s^{-1}$]
- M_G — massa do incremento efectuado no instante t [g]

$$M_G = \mu(t)\ W/V$$

A condição de toma correcta implica

$$W \geqslant W_o$$
$$V \leqslant V_o\ W/W_o$$

em que:

$$W_o = 3\ d\ (d > 0{,}3\ cm)$$
$$W_o = 1\ cm\ (d \leqslant 0{,}3\ cm)$$
$$V_o = 40\ cm \cdot s^{-1}$$

Quando a toma é correcta, tem-se pois:

$$M_G \geqslant M_{GO} = \mu(t)\ W_O/V_O = 0.075\ d\ \mu(t)$$

Verifica-se que não há interesse em escolher uma massa $M_G > M_{GO}$, porquanto:

* o custo da amostragem a jusante cresce com a massa da amostra;
* para uma mesma massa da amostra M_E, $\sigma^2(EI)$ e $\sigma^2(ES)$ são tanto menores quanto menor for a massa do incremento M_G;
* $\sigma^2(EF)$ só depende da massa total da amostra.

Logo, a condição de toma correcta define uma massa optimizante do incremento, em cada andar de amostragem, que é igual a

$$M_{GO} = 0.075\ d\ \mu(t) \text{ — unidades C. G. S.}$$

Habitualmente escolher-se-á $W = W_o$ e $V = V_o$ (1).

6.5.3.3 — Escolha duma lei de integração

Se se temem vriações periódicas de qualidade escolhe-se uma lei aleatória estratificada.

Caso contrário escolhe-se uma lei sistemática.

Em ambos os casos θ terá que ser um sub-múltiplo inteiro da duração D_L do deslocamento do lote.

6.5.3.4 — Realização da condição de Fidelidade. Valor a dar ao intervalo (constante ou médio) θ

Para cada andar n:

$$\sigma_n^2(ET) = \sigma_n^2(ED) + \sigma_n^2(EI_1) + \sigma_n^2(EI_3 + \sigma_n^2(EF) + \sigma_n^2(ES)$$

1. Erro de ponderação ED.

   É imperativo regularizar o caudal e, neste caso, $\sigma_n^2(ED)$ é desprezável.

2. Erro de integração EI_1.

   Se se dispõe dos resultados duma experiência variográfica, calcula-se $\sigma_n^2(EI_1)$ para diferentes valores de θ e iterativamente calcula-se o valor de θ compatível com o erro total.

   Se se não dispõe de informação variográfica, Gy aconselha, em face da sua experiência, que se dê a θ um valor menor ou igual a 10 minutos.

   Para $\theta < 10$ min, $\sigma_n^2(EI_1)$ é desprezável.

3. Erro de integração do termo periódico EI_3.

   Se se dispõe dos resultados da variografia, determina-se, para a lei escolhida, o valor máximo tomado por $\sigma_n^2(EI_3)$.

   Se se não dispõe de informação, escolhe-se uma lei aleatória estratificada com uma duração de estrato θ de 5 a 10 min. Nestas condições, a experiência de Gy mostra que $\sigma_n^2(EI_3)$ é desprezável.

4. Erro fundamental EF e Erro de Segregação ES.

   Sabemos que $\sigma_n^2(EF) + \sigma_n^2(ES) = \sigma_n^2(EI_2)$. Quando se dispõe do variograma, calcula-se $\sigma_n^2(EI_2)$ que é proporcional a θ.

   Quando não se dispõe do variograma, a experiência de Gy indica que, em geral, $\sigma^2(ES) \leqslant \sigma_n^2(EF)$.

   Donde: $\sigma_n^2(EI_2) \leq 2\ \sigma_n^2(EF)$.

   Assim, quando $\theta \leq 10$ min. e o caudal é regularizado, a condição de fidelidade é:

   $$\sigma_n^2(EF) \leqslant R_n^2/2.$$

   Teremos:

   $$\sigma_n^2(EF) = C\ d_n^3/M_{E_n} \leqslant R_n^2/2$$

   o que conduz a uma massa da amostra no andar n

   $$M_{E_n} \geqslant 2\ C\ d_n^3/R_n^2$$

---

(1) — Há uma excepção, quando se utiliza um amostrador tipo «Godet» e não há altura disponível para que o «Godet» tenha capacidade necessária para o incremento. Então aumenta-se W (para aumentar a capacidade, para a altura disponível) e V por forma que $\frac{V}{V_o} = \frac{W}{W_o}$.

a um número de incrementos

$$Q_n \geqslant 2\ C\ d_n^3/R_n^2\ M_{G_n}$$

em que $M_{G_n} = 0.075 \cdot d_n \cdot \mu_n(t)$, donde

$$Q_n \geqslant 26\ C\ d_n^2/R_n^2\ \mu_n(t)$$

e a um intervalo θ_n

$$\theta_n = D_L/Q_n \leq D_L\ R_n^2\ \mu_n(t)/26\ C\ d_n^2.$$

Se o intervalo assim calculado for inferior a 10 min., arredondar-se-á para o sub-múltiplo de D_L mais próximo.

Se for maior que 10 min., tomar-se-á como solução o sub-múltiplo de D_L mais próximo de 10 min.

5. Exemplo de aplicação.

Consideremos o minério de ferro do Sul de Angola referido em 4.3.6.2.

Tinhamos estimado $d = 4.22$ cm
$C = 0.078$ g/cm³.

Suponha-se que se pretende obter uma amostra dum período de duas horas ($D_L = 7200$ s) durante o qual o caudal é de 1800 t/hora ($\mu(t) = 0.5 \times 10^6$ g . s^{-1}) e que a variância relativa tolerada neste andar é $R_n^2 = 4.10^{-6}$.

Teremos:

$$M_{G_n} = 0.075 \times 4.22 \times 0.5 \times 10^6 = 0.16 \times 10^6\ g = 160\ kg$$

$$Q_n \geq 26 \times 0.078 \times 4.22^2/4 \times 10^{-6} \times 0.5 \times 10^6 = 18.07 \simeq 18$$

$$\theta_n = D_L/Q_n = 7200/18 = 400\ s = 6\ min\ 40\ seg.$$

Como $\theta_n \leqslant 10$ min é esta a solução.

Nesta hipótese, a amostra será constituída por 18 incrementos de 160 kg, pesando cerca de 2880 kg.

6.6 — Amostragem de lotes sólidos com zero dimensões

Consiste na amostragem dum certo número Q de unidades inteiras. Desde que se assegure a cada unidade a mesma probabilidade de ser amostrada (sistemática ou aleatória se não se conhecer N), a amostragem é correcta.

Se se conhecer a variância de dispersão dos teores do lote, a variância da amostra será:

$$\sigma^2_E \leqslant (1/Q - 1/N)\ \sigma^2_{a_L}$$

Caso contrário não é possível estimar σ^2_E(1).

6.7 — Amostragem de lotes manipuláveis

Já foi tratado no Capítulo 5.

— x —

BIBLIOGRAFIA

[1] — P. Gy — Poids à donner à un échantillon — Abaques. Revue de l'Industrie Minérale 38 (1956).

[2] — P. Gy — Nomogramme d'échantillonnage — Sampling Nomogram — Probenahme Nomogramm — Editado por Minerais et Métaux — 1956.

[3] — Échantillonnage pour analyse granulométrique — Annales des Mines (Abr. 1956).

[4] — P. Gy — L'échantillonnage des minerais en cours de transport continu — Revue de l'Industrie Minérale 47 (1965) pg. 51-82.

[5] — P. Gy — Calculateur d'échantillonnage — Pierre Gy's sampling slide rule. Réguas de cálculo distribuidas pela Société de l'Industrie Minérale Saint-Etienne (1965).

[6] — P. Gy — Le principe d'équiprobabilité — Annales des Mines (Déz. 1964) pg. 779 a 794.

[7] — P. Gy — L'échantillonnage des minerais en vrac — Tôme 1: Théorie Générale — Número Especial de La Revue de l'Industrie Minérale — 15 Janeiro 1967 — 188 pag.

[8] — P. Gy — L'echantillonnage des minerais en vrac — Tôme 2: Théorie générale (fin) — Erreurs opératoires — Compléments — Número Especial de la Revue de l'Industrie Minérale — 15 Setembro 1971. 280 pags.

[9] — P. Gy — L'échantillonnage des minerais morcelés — Présentation d'une théorie générale. Annales des Mines (Nov. 1972) pg. 51-68.

[10] — P. Gy — Relatório interno da CML — Análise da Instalação de Amostragem do Porto de Moçâmedes — 1973.

[11] — P. Gy — Théorie et Pratique de l'échantillonnage des matiéres morcelées — Edição P. G.» — Cannes 1975.

[12] — Norme Internationale ISO — 3086: Minerais de fer — Méthodes expérimentales de contrôle de l'erreur systématuque d'echantillonnage.

(1) — Se as unidades não forem ordenadas (ex.: lotes de sacos ou de tambores não numerados por ordem de enchimento) é possível estimar σ^2_{aL} a partir da análise separada das Q unidades que constituem a amostra.

[13] — **A. Desnoes** — Utilisation des suspensions denses de mercure dans le bromoforme au laboratoire. Revue de l'Industrie Minérale 47 (1965) pg. 33-38.

[14] — **G. Matheron** — La théorie des variables régionalisées et ses applications — Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontaineleau — Fascículo 5 (1970) 212 pag.

[15] — **G. Matheron** — Le krigeage universel (1969) Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. n.º 1, 82 pag. Ed.: ENSMP, Paris.

[16] — **G. Matheron** — The Intrinsic Random Functions and their applications (1973). Advances in Applied Probability, Dez. 1973, n.º 5. pg. 439-468.

[17] — **G. Matheron** — Comparaison entre les échantillonnages à poids constant et à effectif constant — Revue de l'Industrie Minerale — Agosto, 1966.

[18] — **Merks, J. W.** — Desirable features of automatic sampling Plants, Second International Symposium on Handling and Transportation of Minerals — Rotterdão — Outubro 1974.

[19] — **Marques, J. C.** — Relatório interno sobre a Instalação de Amostragem no Porto de Moçâmedes — Janeiro 1973.

[20] — **Marques J. C.** — Notas sobre amostragem de minérios tal-qual a granel, preparadas para a cadeira de Matemáticas Aplicadas (II PARTE) — I .S. T. — 1972.

[21] — **Marques, J. C.** — Relatório interno sobre a Instalação de Amostragem do Porto de Europoort (Roterdão) — Junho 1974.

[22] — **Marques J. C.** — Teoria e Prática de Amostragem de Materiais a Granel segundo o Formalismo de P. Gy — Prèprint apresentado no Seminário de Geomatemática do CVRMUL — Janeiro 1977.

O sector siderúrgico nos países do Terceiro Mundo e nos países industrializados

(Continuação da pág. 138)

Se bem que representando actualmente 70 % da população mundial, os países do Terceiro Mundo contribuem apenas com 8 % para os 700 milhões de toneladas da produção de aço bruto, da qual consomem entre 10 a 13 %, consumo que deverá atingir os 25 % até ao ano 2000. Por outras palavras, os países em questão deveriam criar novas capacidades da ordem dos 400 milhões de toneladas, a fim de poderem satisfazer as suas necessidades sem terem de recorrer à importação; esta hipótese pode, todavia, considerar-se impraticável na medida em que há que distinguir entre os países com possibilidades, neste domínio, de se lançar neste tipo de empreendimentos e aqueles para quem tal iniciativa é impraticável.

Deste modo, podem eliminar-se logo à partida as nações pouco povoadas, dado os elevados montantes do investimento, os problemas de matérias-primas, de energia e de mão-de-obra que o projecto acarretaria. Cite-se, a título de exemplo, o Gabão, cujo mercado ficaria saturado com uma produção anual de 200 mil toneladas de aço, sendo 30 mil de redondos de betão, não se justificando nestas condições a montagem de uma unidade de produção com capacidade tão reduzida. Na realidade, à excepção da Nigéria, não parece viável o desenvolvimento das actividades siderúrgicas nos países da Africa Negra onde, por vezes, se revela muito mais adequada a instalação de pequenas unidades de laminagem.

Em contrapartida, a questão põe-se de forma diferente em relação aos países árabes, os quais, embora pobres em minério de ferro, dispõem de grandes recursos energéticos, já se justificando plenamente a instalação de uma indústria siderúrgica com base no processo de redução directa utilizando o gás natural; é o caso dos países da OPEP — Iraque, Qatar, Líbia, Arábia Saudita e Argélia — que, se bem que dispondo de número reduzido de consumidores potenciais, poderão virar-se para a exportação.

Não obstante, o mundo árabe, à excepção da Argélia onde a procura é importante dadas as dimensões da sua indústria a jusante, não entra na categoria dos futuros grandes produtores de aço, a qual se refere sobretudo aos países com mais de cem milhões de habitantes, que, com um importante mercado interno a satisfazer, têm assegurado o futuro do seu sector siderúrgico. É o caso do Brasil, Índia e China que parece disposta a tornar-se num grande país siderúrgico (se bem que não caiba na classificação nem de país do Terceiro Mundo nem de um país em vias de desenvolvimento). Efectivamente, os seus projectos apresentam tal envergadura que, a concretizarem-se, modificarão a imagem da siderurgia mundial.

A China, quinto produtor mundial (23,4 milhões de toneladas) entre a RFA e a Itália, é o país que reúne maior número de condições de desenvolvimento das indústrias siderúrgicas. Com importantes reservas de minério [1], carvão e petróleo, os chineses projectam aumentar a sua produção siderúrgica, até ao ano 2000, a um ritmo de 4 a 6 milhões de toneladas suplementares anualmente. Deste modo, e através da renovação das unidades de produção actuais e construção de novas unidades, as capacidades de produção passariam de 30 milhões de toneladas actualmente para 60 milhões em 1985, devendo atingir os 88-132 milhões nos próximos 22 anos.

O Brasil ocupa o décimo quarto lugar na produção siderúrgica mundial (entre a Bélgica e a Espanha) e conta-se igualmente entre os futuros grandes produtores de aço, sendo a exiguidade de petróleo compensada pela abundância de minério de ferro, que poderá utilizar como moeda de troca de recursos energéticos. Daí o surto da indústria do aço cuja produção, 2 milhões de toneladas em 1960, atingia em 1974 os 7 milhões, ou seja um aumento de 229 %, seguido de um outro de 50 % entre 1974 e 1977 (11 milhões), num período em que os países industrializados se viam obrigados a reduzir as suas capacidades. Entretanto, prevê-se ainda que sejam realizados, até 1981, investimentos no montante de 3,5 mil milhões de dólares tendo em vista duplicar a produção num período de 10 anos.

1 A sua qualidade não é das melhores; entretanto, serão exploradas novas minas. As principais fontes de abastecimento da China no exterior são a Austrália e o Brasil.

A Índia, décimo sexto produtor mundial (10 milhões de toneladas — entre a Espanha e a Austria), pertence também à categoria dos futuros grandes produtores de aço; todavia, terá de percorrer ainda um longo caminho uma vez que o consumo local atinge apenas 16 kg/ano/habitante, contra 100 kg no Brasil, 370 em França, 512 no Japão e 618 nos Estados Unidos. O país pretende aumentar a sua capacidade total para 60-75 milhões de toneladas anuais no ano 2000.

Face ao exposto, e independentemente da importância dos projectos previstos para a América Latina, Extremo Oriente[2] e outros países, conclui-se que está longe de ser possível atingir os 400 milhões de toneladas suplementares que permitiriam aos países do Terceiro Mundo atingirem o nível de auto-abastecimento. Aliás, do ponto de vista dos peritos, e excepto no que diz respeito à China, a realidade apontaria para valores menores em cerca de 50 % aos estimados nas previsões referidas. Com efeito, só os países industrializados têm possibilidades, do ponto de vista técnico, de construir rapidamente tão importantes capacidades, já que os países em vias de desenvolvimento não têm condições, inclusivamente no aspecto financeiro, para, por si sós, levarem a cabo tal empreendimento.

Cada país tem os seus problemas próprios em função dos respectivos mercados, condições dos povos e recursos em matérias-primas, verificando-se que, na maior parte dos casos, se tem posto em funcionamento unidades de produção sem quadros técnicos e operários especializados, o que dá origem a uma série de problemas difíceis de solucionar. É o caso do Qatar (200 mil habitantes) e da minifábrica de UMM Said, que entrou em serviço este ano e cujo funcionamento será assegurado, por um período de oito anos, pelo grupo japonês Kobe Steel, responsável pela sua construção. Durante os trabalhos, a Kobe forneceu uma equipa composta por mais de 100 pessoas encarregada de vigiar várias centenas de operários vindos da Coreia do Sul, Filipinas, Índia e de outros países. Os engenheiros, contramestres e operários qualificados foram recrutados no Egipto e Extremo Oriente.

A nova geografia do aço encontra-se, pois, longe de constituir uma ameaça para os países industrializados. Nos países de sector siderúrgico recente, as necessidades tendem a desenvolver-se a ritmo mais acelerado que o do aumento da capacidade de produção, cujo arranque é, por outro lado, muito mais moroso; nenhum deles estará, pois, à altura de fazer concorrência aos Estados Unidos, Japão ou à CEE em matéria de tonelagem. Estes países reduzirão, entretanto, as suas importações, o que irá afectar consequentemente as empresas do ramo japonesas e do Mercado Comum, exportadores tradicionais. Para estes dois blocos subsiste ainda um factor mais inquietante, o de verem um dia os países do Terceiro Mundo cortar o fornecimento de minério com o objectivo de fazer valer as vantagens de que dispõem. Refira-se, a título de exemplo, que, no caso de o Brasil decidir bruscamente interromper as suas exportações (60 milhões de toneladas/ano, num total de 300 milhões comercializados em todo o mundo), a Europa — e o Japão —, que importa 130 milhões de toneladas, ficaria a braços com a necessidade imperiosa de encontrar nova fonte de fornecimento que para si canalizasse os 30 milhões de toneladas de que não poderia prescindir.

Produção mundial de aço por regiões
(Valores de 1977 em toneladas)

Europa Ocidental	155 210 000
Europa de Leste	147 000 000
América do Norte	126 810 000
Oceânia	7 500 000
América Latina	21 870 000
dos quais América Central	15 000
Argentina	2 700 000
Brasil	11 200 000
Chile	560 000
Colômbia	400 000
Cuba	300 000
México	5 500 000
Peru	320 000
Uruguai	20 000
Venezuela	814 000
África	8 400 000
dos quais África do Sul	7 300 000
Argélia	400 000
Rodésia	500 000
Tunísia	100 000
Outros	150 000
Ásia	146 600 000
dos quais China	23 400 000
Coreia do Norte	3 200 000
Coreia do Sul	4 200 000
Filipinas	300 000
Formosa	7 100 000
Hong-Kong	120 000
Índia	10 000 000
Indonésia	100 000
Japão	102 400 000
Malásia	250 000
Singapura	200 000
Tailândia	300 000
Outros	350 000

Isto significa que seriam necessários vários anos de trabalho de abertura de minas para o conseguir. Daí os interesses no domínio das indústrias extractivas adquiridas, no decurso dos anos, pelas siderurgias da CEE nos países produtores, onde controlam actualmente uma produção da ordem dos 17 milhões de toneladas.

Nem só a siderurgia europeia foi afectada pela crise que tem grassado nos últimos quatro anos neste sector; o Japão, que contribuiu para o agravamento da crise na Europa, sentiu também, ainda que menos acentuadamente, os seus efeitos. Assim, a produção siderúrgica japonesa foi reduzida de apenas 10 % no período 1973-76, tendo o consumo local de aço baixado de 27,5 %.

A produtividade na indústria siderúrgica nipónica mantém-se imbatível, embora inferior à até aqui verificada, tendo atingido em 1977 as 327 toneladas de aço anuais por trabalhador, contra 361 em 1973. Em contrapartida, a produtividade da CEE não ultrapassou, em média, 175 toneladas em 1977, situando-se a França em último lugar com 149 toneladas.

A fim de sobreviver à queda do consumo e à guerra dos preços, as empresas do sector recorreram a Bruxelas — cuja resposta consistiu no Plano Davignon que, aliás, todas elas procuram ludibriar —, endividaram-se e recorreram ao despedimento de trabalhadores. O endividamento do sector atingiu em França, no ano de 1977, um recorde de 111 % do seu volume de negócios (contra 87 % um ano antes, data em que correspondia, em Itália, uma taxa de 104 % contra apenas 22 e 21 %, respectivamente na República Federal da Alemanha e nos Estados Unidos). Quanto à redução de efectivos, só em 1977 a França começou a recorrer a este tipo de soluções (tendo procedido a 11 500 despedimentos), uma vez que até então o Estado tudo fez para evitar tal medida. Entretanto, para fazer face à crise, a maior parte dos restantes países europeus não hesitou em fechar os olhos a problemas sociais. No período 1974-77, as siderurgias alemãs despediram 25 mil efectivos muito embora tivessem procedido à reestruturação do seu aparelho de produção antes da crise, que se traduzira por uma contracção de efectivos da ordem dos 20 mil entre 1960 e 1974 (contra 500 em França). Esta situação leva o banco privado alemão Trinkaus und Burkhardt a concluir, num estudo recentemente elaborado sobre a situação do sector siderúrgico no país, que o período mais crítico teria terminado.

2 As capacidades atingiriam, até 1985, 9,5 milhões de toneladas na Argentina, 16 milhões no México, 10 milhões na Venezuela e 20 milhões na Coreia do Sul (perspectivas que parecem merecedoras das maiores reservas).

(Continua na pág.ª 208)

NÚMERO 451/452 JANEIRO/FEVEREIRO/MARÇO 1979 ANO LIV VOLUME XL

C. D. U. 519.24/25/28:622.1:550

Representatividade da amostragem de jazidas minerais

JOSÉ QUINTINO ROGADO
Universidade Técnica de Lisboa
Instituto Superior Técnico

RESUMO

São analisados aspectos da representitividade da amostragem de jazidas minerais destinada a ensaios mineralúrgicos e metalúrgicos.

É definida população de referência *e apresentada metodologia para a reproduzir por amostragem e apresenta-se um exemplo real extraído do estudo de extensa bacia carbonífera Brasileira.*

ABSTRACT

Comments are developed on the representativity of ore bodies sampling for obtaining data concerning the behaviour on concentration and metallurgical processes.

The reference population *is defined and some methods for reproducing it are presented.*

An example taken from a study carried out in a Brazilian coal basin is summarized.

1. INTRODUÇÃO

O problema que aqui se aborda não diz respeito ao reconhecimento de uma jazida por meio da amostragem, estudo este efectuado nas fases de pesquisa e reconhecimento.

Supõe-se, pelo contrário, que esse reconhecimento está feito (com maior ou menor rigor), que se definiram, com certos erros, pelo menos, as dimensões e forna da jazida, o teor médio global, a massa mineralizada global, isto é, se avaliaram as reservas; pode ainda haver-se mesmo estabelecido determinada tipologia, baseada, por exemplo, nos teores tal-qual e/ou na mineralogia e/ou mineralurgia, ou ainda em propriedades mecânicas, etc.

De posse de todos estes dados, trata-se sim do problema de colher amostras da jazida ou de parte importante dela, destinadas a estudos mineralúrgicos que, como se sabe, se iniciam por testes laboratoriais descontínuos (testes de bancada) para se passar, seguidamente, aos testes piloto ou semi-industriais contínuos, a estes dois escalões de ensaios correspondendo, como é óbvio, volumes de amostra muito diferentes.

2. POPULAÇÃO DE REFERÊNCIA

Na realidade, a pesquisa e reconhecimento forneceram uma *população de referência* que resultou da amostragem já efectuada na jazida. Mediante certo modelo de função aleatória compatível com os dados e útil para orientar a inferência estatística terá sido possível, na maioria dos casos, construir modelo(s) de variograma(s) baseado(s) nos variogramas experimentais e, mesmo (se necessário) estimar uma deriva e realizar, em qualquer caso, krigagem da jazida, tomando por base descritização relacionada com a unidade ou o bloco tecnológico, isto é, aquele volume sobre o qual se poderão tomar opções nos actos da futura exploração.

Consequentemente, referido(s) a tal bloco tecnológico, dispõe-se de histograma(s) que são, evidentemente, a tradução da população dos valores krigados, a que corresponde certo valor médio $m = E(Z_v) = E(Z_v^*)$ e certa variância de dispersão $D(Z_v^*)$.

É claro que se tiver havido necessidade ou conveniência em definir, já nesta fase, uma tipologia, a jazida terá sido dividida em sub-jazidas, a cada uma das quais corresponderá um histograma para o atributo considerado relevante.

Além disso, poder-se-á estar interessado em mais de um atributo. Por exemplo, no caso dos carvões, poderá interessar os teores de cinzas, matérias voláteis, carbono fixo, enxofre, etc.

E todos estes diferentes atributos poderão ser necessários para caracterizar qualquer dos minérios que a tipologia definiu na jazida. Dispor-se-á, assim, às vezes, de colecção relativamente numerosa de histogramas: uns tantos para cada tipo de minério.

3. OBJECTIVOS DA AMOSTRAGEM. SUA CONSTITUIÇÃO

3.1. Primeiro objectivo: Investigação do tratamento mais adequado

A representatividade de uma amostragem não tem significado positivo se não se houver previamente definido o seu objectivo.

Suponha-se então que tal objectivo se pode genericamente caracterizar do seguinte modo:

«Pretende-se obter amostragem para investigar, em primeira fase, da adequação de determinado(s) processo(s) mineralúrgico(s) e/ou metalúrgicos(s)».

Trata-se, obviamente, de realizar ensaios de bancada diversos, os quais deverão estudar a resposta, ao tratamento em questão, do espectro que o histograma reflecte.

Quer dizer, o histograma traduz uma sub-tipologia, expressa pelo parâmetro respectivo, a qual terá de ser ensaiada em toda a extensão.

Há então que investigar domínio(s) A $\{Z_{min}, Z_{max}\}$ por onde se espraia(m) o(s) atributo(s) julgado(s) relevante(s). Supondo, por simplicidade, que um único atributo é relevante, deverá, então, dividir-se o domínio respectivo, em intervalos disjuntos $\triangle Z_i$, tais que $\cup \triangle Z_i = A$, e escolher, na jazida, locais onde haja fortes probabilidades das amostras aí colhidas exibirem valores do atributo que caiam dentro de cada um dos intervalos $\triangle Z_i$, assim arbitrariamente escolhidos.

A tais amostras chamaremos incrementos. Os respectivos pesos variarão, conforme os casos, entre 0,5 e 150 Kg.

Dois casos se poderão então dar:

1.º — Há boa acessibilidade à jazida: por exemplo, os testemunhos das sondagens existem, têm largo diâmetro, estão ordenados e bem referenciados, não se encontram alterados e será, portanto, possível, fazer colheita de amostras nos próprios testemunhos (esta observação chama a atenção para a necessidade de projectar convenientemente as campanhas de sondagens, posteriores às da pesquisa inicial, tomando em consideração os diâmetros necessários para virem a fornecer os incrementos referidos). Ou ainda, outro exemplo, a jazida dispõe de ossatura básica de preparação para desmonte — galerias, travessas, chaminés, devidamente amostradas. Será, então, possível, colher aí tantos incrementos quantos os necessários para satisfazer o *desideratum* — uma amostra de teor $\overline{\triangle Z_i}$ representando cada intervalo $\triangle Z_i$.

Será desejável que a amplitude dos intervalos $\triangle Z_i$ não seja pequena, por razões óbvias de economia; por outro lado, deverá constituir-se a amostra representativa de cada intervalo $\triangle Z_i$ com incrementos colhidos em diferentes locais, previamente seleccionados nas carotes ou nas galerias, travessas, chaminés, etc., para que atributos *ocultos*, mas existentes, venham a ser considerados na investigação. Teoricamente, cada amostra representativa de $\triangle Z_i$ deverá ser constituída por k incrementos de teor médio m_{ij} que satisfaçam, por exemplo, às condições

$$\begin{cases} a_i^j\left(m_{ij} - \overline{\triangle Z_i}\right) \longrightarrow 0 \\ a_i^j\left(m_{ij} - \overline{\triangle Z_i}\right)^2 \longrightarrow 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \sum_j a_i^j = 1 \\ a_j^j \geqslant 0 \end{matrix} \qquad j \in \{1, \ldots, k\}$$

Mas aqui surgem certas dificuldades, a saber:

(i) Cada incremento será constituído por conjunto de peças minerais a granel, de diferentes calibres. Deverão, assim, por si próprios, satisfazer às condições estabelecidas pela teoria da amostragem de Gy, isto é, deverão ter pesos tais que os tornem representativos das granulometrias que eles próprios exibem.

Antes de mais, deve considerar-se duas situações favoráveis:

— O processo de tratamento que se pretende ensaiar exige, *a priori*, que se trabalhe com granulometria fina (por exemplo, inferior a 1 mm, ou 100 μ ou 50 μ, etc.) e há disponíveis testemunhos de sondagens. Neste caso, a simples extracção de um segmento de testemunho e a sua